



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



3 3433 06630789 7

OEA
FARM
EC

France

(France)

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

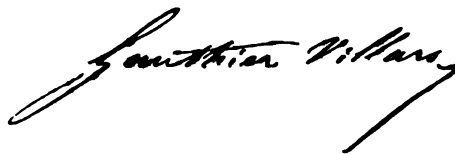
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

2011

L'Éditeur de cet Ouvrage se réserve le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Il poursuivra, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de ses droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours de 1865, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.



ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR M. L. PASTEUR,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
DIRECTEUR DES ÉTUDES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE.

AVEC

UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES.

TOME DEUXIÈME — ANNÉE 1865.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1865

(L'Éditeur de cet Ouvrage se réserve le droit de traduction.)

XR0Y W4B
21819
Y9A7B1

COMITÉ DE RÉDACTION.

M. PASTEUR, Directeur des Études scientifiques, *Président*.

MM.

MATHÉMATIQUES.....	{	BRIOT,
		HERMITE,
		PUISEUX.

PHYSIQUE..... VERDET.

CHIMIE..... H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE.

HISTOIRE NATURELLE.....	{	DELESSE,
		DES CLOIZEAUX,
		LACAZE-DUTHIERS,
		VALENCIENNES.



631111

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

RECHERCHES

SUR

LES TUYAUX D'ORGUE DITS A CHEMINÉE,

PAR M. E. GRIPON,
PROFESSEUR AU LYCÉE ET A L'ÉCOLE SUPÉRIEURE DES LETTRES ET SCIENCES D'ANGERS.

Les tuyaux d'orgue à *cheminée* se composent de deux tuyaux cylindriques ayant même axe et ne différant que par le diamètre.

On les emploie depuis longtemps dans la construction des orgues, soit pour diminuer la longueur de certains tuyaux sans en altérer le ton, soit pour varier les timbres.

Daniel Bernoulli a donné une théorie de ces tuyaux dans l'important Mémoire sur les tuyaux sonores que connaissent tous les physiciens (1). Cette théorie renferme des inexactitudes qui ont été relevées par M. Duhamel (2); mais comme ces erreurs se compensent dans la suite des calculs, Bernoulli arrive à des formules exactes. Il a fait quelques expériences pour les vérifier. Poisson reprit la théorie des tuyaux sonores après Bernoulli, Euler et Lagrange, et il en fit le sujet d'un de ses plus beaux Mémoires.

(1) *Mémoires de l'Académie royale des Sciences*; 1762.

(2) *Journal de Mathématiques de J. LIOUVILLE*, t. XV.

On sait que dans un tuyau le son s'éteint lorsqu'on cesse d'entretenir les vibrations à l'embouchure. Cette extinction rapide ne peut être attribuée au frottement qui devrait d'abord affaiblir le son. Poisson admet, pour l'expliquer, que le fond d'un tuyau fermé, celui d'un tuyau ouvert, ne sont ni un nœud ni un ventre de vibration parfaits; dès lors le mouvement s'affaiblit à chaque réflexion; le grand nombre de réflexions qu'il subit l'anéantit promptement. Au lieu donc de supposer au fond des tuyaux la vitesse ou la condensation nulles, Poisson admet qu'il s'établit là un rapport constant entre la vitesse et la condensation.

Un autre caractère important de son analyse, c'est qu'au lieu de se donner l'état initial de toutes les tranches d'air, au lieu de supposer la condensation nulle à l'embouchure, Poisson se donne la vitesse de la première tranche, et cela pendant toute la durée du mouvement. Cette vitesse est donnée par une fonction périodique du temps.

A ces conditions générales il faut, pour les tuyaux à cheminée, en ajouter deux autres qui ont rapport au point de jonction des deux tuyaux :

- 1° Les tranches d'air contiguës doivent y avoir même densité;
- 2° Leurs vitesses sont en raison inverse des aires des deux tuyaux.

Nous retrouverons les mêmes conditions dans l'analyse de M. Duhamel qui arrive d'une manière très-simple et très-élégante au résultat final, en prenant pour condition que l'embouchure est un ventre et qu'il y a un nœud ou un ventre à l'extrémité du tuyau fermé ou ouvert.

Une remarque commune aux trois géomètres que nous venons de citer, c'est qu'il doit y avoir à la jonction des deux tuyaux un certain espace, dans lequel le parallélisme des tranches d'air en mouvement est altéré. De là une perturbation qui échappe au calcul et qui est vraisemblablement faible.

Poisson conclut de son analyse que l'on ne peut déterminer toutes les lois possibles des vibrations sonores, ni fixer le ton le plus bas que le tuyau doit rendre. On peut seulement exclure comme impossibles certaines lois de vibration.

Si nous appelons l la longueur du tuyau qui porte l'embouchure du *premier* tuyau, l' celle du *second*, c le rapport de l'aire du second à celle du premier, λ la longueur d'ondulation telle qu'on la prend d'ordinaire en physique, la distance théorique de deux nœuds, par exemple (c'est la moitié de ce que Poisson désigne par λ), on ne doit pas avoir, dans les tuyaux fermés,

$$(1 + c) \sin \pi \frac{l + l'}{\lambda} + (1 - c) \sin \pi \frac{l - l'}{\lambda} = 0;$$

dans les tuyaux ouverts,

$$(1 + c) \cos \pi \frac{l + l'}{\lambda} - (1 - c) \cos \pi \frac{l - l'}{\lambda} = 0.$$

ce qui, comme nous le verrons tout à l'heure, signifie simplement que l'extrémité ouverte du premier tuyau ne doit pas être un nœud.

Si le ton est donné par l'observation, les formules permettent de calculer la position des nœuds et des ventres, et on peut alors contrôler par l'expérience les résultats que fournit la théorie.

D'abord, dans le second tuyau, les nœuds et les ventres ont la place qu'ils occuperaient dans un tuyau ordinaire rendant le son du tuyau mixte.

Est-il fermé, et appelle-t-on y la distance des nœuds ou des ventres à la jonction des tuyaux, on aura

$$(1) \quad \begin{cases} \text{Pour les ventres. . . } \cos \pi \frac{l' - y}{\lambda} = 0, \\ \text{Pour les nœuds... } \sin \pi \frac{l' - y}{\lambda} = 0. \end{cases}$$

Le second tuyau est-il ouvert, les formules deviennent

$$(2) \quad \sin \pi \frac{l' - y}{\lambda} = 0, \quad \cos \pi \frac{l' - y}{\lambda} = 0.$$

Quant au premier tuyau, les formules correspondantes sont :

Tuyaux fermés. — Nœuds :

$$(1 + c) \sin \pi \frac{l' + y}{\lambda} - (1 - c) \sin \pi \frac{l' - y}{\lambda} = 0,$$

qu'on peut transformer en

$$(3) \quad \tan \pi \frac{y}{\lambda} + c \tan \pi \frac{l'}{\lambda} = 0.$$

Ventres :

$$(1 + c) \cos \pi \frac{l' + y}{\lambda} + (1 - c) \cos \pi \frac{l' - y}{\lambda} = 0$$

ou

$$(4) \quad 1 + c \tan \pi \frac{y}{\lambda} \tan \pi \frac{l'}{\lambda} = 0.$$

On trouve pour les *tuyaux ouverts* des formules analogues. Nœuds :

$$(1 + c) \cos \pi \frac{l' + y}{\lambda} - (1 - c) \cos \pi \frac{l' - y}{\lambda} = 0$$

ou

$$(5) \quad c - \tan \pi \frac{y}{\lambda} \tan \pi \frac{l'}{\lambda} = 0.$$

Ventres :

$$(1 + c) \sin \pi \frac{l' + y}{\lambda} + (1 - c) \sin \pi \frac{l' - y}{\lambda} = 0$$

ou

$$(6) \quad c \tan \pi \frac{y}{\lambda} + \tan \pi \frac{l'}{\lambda} = 0.$$

Si on admet que l'embouchure soit au ventre, supposition bien naturelle, on retombe sur les formules trouvées par Bernoulli et démontrées par M. Duhamel.

Tuyaux fermés :

$$(7) \quad 1 - c \tan \pi \frac{l}{\lambda} \tan \pi \frac{l'}{\lambda} = 0.$$

Tuyaux ouverts :

$$(8) \quad c \tan \pi \frac{l}{\lambda} + \tan \pi \frac{l'}{\lambda} = 0.$$

Ces formules n'ayant jamais, à ma connaissance, été vérifiées par l'expérience, j'ai entrepris de le faire, et c'est le sujet du présent travail.

Il peut être divisé en plusieurs Sections :

Dans la première Section je décris les procédés d'expérience, et je cherche les conséquences générales que l'on peut tirer des formules théoriques, sans les résoudre; les cas dans lesquels cette résolution peut être effectuée d'une manière simple; et je soumetts à l'expérience les résultats que j'ai obtenus.

Dans la seconde Section, je cherche la position des nœuds et des ventres; le calcul et l'expérience me donnent des résultats que je compare.

Enfin, dans une troisième Section, je donne le moyen de déterminer le ton d'un tuyau à cheminée de dimensions données, et j'indique comment on peut construire un tuyau rendant un son déterminé.

PREMIÈRE SECTION.

PROCÉDÉS D'EXPÉRIENCE ET CONSÉQUENCES GÉNÉRALES DES FORMULES THÉORIQUES.

J'ai employé des tuyaux en verre, en gutta-percha et en zinc. Je mesurais leurs diamètres avec une règle à coulisse munie d'un vernier. Pour les tuyaux en verre, j'y introduisais un volume déterminé d'eau, je mesurais la hauteur de la colonne. Un calcul bien connu me donnait l'aire du tube. Je n'ai fait usage que d'embouchures circulaires. Elles avaient été déjà employées par MM. Desains et Lissajoux, c'est ce qui a déterminé mon choix. Le tuyau se continuait par un ajutage en bois de même diamètre intérieur, taillé en biseau. La pièce à lumière circulaire était portée par une planchette. On pouvait, à l'aide de deux vis, déplacer cette pièce dans deux directions rectangulaires et, de plus, perpendiculaires à l'axe du tuyau. La même pièce était mobile dans son collier, et on pouvait faire varier à volonté la distance de la fente circulaire au biseau.

Ces dispositions permettaient d'ajuster facilement l'embouchure, et j'ai pu, grâce à elles, obtenir de mes tuyaux des sons très-purs, souvent très-intenses et de belle qualité.

Pour obtenir facilement des tuyaux de longueurs différentes et varier autant que possible les expériences, j'ai employé deux moyens. Je me suis servi de tuyaux en zinc se raccordant les uns aux autres sur une longueur totale d'un mètre. Une sorte de couvercle en bois me permettait de les fermer lorsque je le voulais. D'autres fois, j'ai fermé les tuyaux à l'aide d'une colonne d'eau; en faisant varier le niveau de l'eau, je changeais par là même la longueur des tuyaux. De cette manière, le tube était toujours complètement fermé, toujours avec la même substance, et l'on sait, d'après Wertheim, que la nature du fond peut parfois

Fig. 1.



influier sur la hauteur du son. La colonne d'eau ainsi introduite est souvent fort longue, elle est mise en vibration par l'air; ses vibrations ne troublent-elles pas celles de la colonne d'air?

D'abord, ce moyen a été employé par Wertheim. De plus, Poisson examine, dans son Mémoire, le cas où un tuyau renferme deux colonnes d'air et d'eau superposées, et il arrive à cette conclusion que le mouvement de la colonne d'eau n'a pas d'influence sur celui de l'air. Le mouvement vibratoire s'affaiblit considérablement en passant de l'air dans l'eau (son intensité dans l'eau est $\frac{1}{3600}$ de l'intensité dans l'air), et il s'affaiblit encore en revenant de l'eau à l'air.

Enfin, j'ai eu recours à l'expérience. J'ai fermé aux mêmes points un tuyau avec une colonne d'eau en laissant libre la surface de l'eau, puis en la recouvrant d'un piston épais composé de plaques de plomb et de liège interposées, de manière à empêcher autant que possible la transmission des vibrations à l'eau, et je n'ai pas trouvé de différences sensibles dans la hauteur des sons obtenus.

Le tuyau embouché, le premier tuyau AB, est vertical; le second CD, d'un plus petit diamètre, pénètre dans le bouchon qui ferme le premier (*fig. 1*); il porte en haut un bouchon qui simule un piston et le maintient dans l'axe du premier. En bas sont un robinet et un tube latéral qui l'unit à un tube de verre vertical. Celui-ci est divisé en millimètres, et dans le cas des tuyaux opaques il fait connaître la position du niveau de l'eau.

Les tuyaux, lorsqu'ils sont en verre, portent eux-mêmes une telle graduation. En versant de l'eau dans le tube latéral, on remplit de ce liquide toute la partie infé-

rieure du premier tube jusqu'à l'orifice du second. Ainsi c'est la position de ce dernier qui limite la longueur du premier.

Ouvre-t-on le robinet, le niveau de l'eau ne varie que dans le second tube et on peut donner à la colonne d'air qu'il renferme la longueur que l'on veut. En amenant le niveau de l'eau dans le premier tube au-dessus de l'orifice du second, on le transforme tout de suite en un tuyau ordinaire et l'on peut déterminer la longueur du tuyau simple qui rendrait le même son que le mixte, pour la même embouchure et sous la même pression. Un thermomètre placé près du tuyau donne la température.

Pour apprécier la hauteur des sons, je me suis servi d'un sonomètre; la corde avait une longueur de 0,959.

Je l'accordais à l'aide d'un diapason faisant 512 vibrations à la seconde. La corde donnait l'octave grave, soit 256 vibrations.

J'ai vérifié avec la sirène le ton de mon diapason; j'ai aussi employé, comme vérification, un diapason qui donnait le *la* normal de 870 vibrations. Les résultats obtenus à l'aide des deux diapasons sont parfaitement concordants. Il n'est généralement pas difficile de prendre l'unisson du ton d'un tuyau, on peut s'aider des battements. Souvent on a une tendance à prendre le ton un peu trop haut, ce qui vient, je crois, de ce que l'on entend à la fois le son fondamental et les harmoniques; ceux-ci tendent à augmenter l'acuité du son grave de la même manière que la nuance d'une couleur se trouverait altérée, si on y ajoutait un petit nombre de rayons de couleurs différentes. Lorsque les sons sont très-graves, les battements ne sont plus perceptibles, les différences de timbre et d'intensité du tuyau et de la corde rendent la comparaison plus difficile.

J'ai fait quelques expériences en cherchant à renforcer à l'aide d'un tuyau mixte le son d'un diapason. Je ne les cite que parce qu'elles m'ont permis de reproduire une expérience de M. Lissajoux sur l'interférence des ondes sonores. Si on détache un diapason de sa caisse renforçante et si on le fait vibrer à l'orifice de la caisse, le son est énergiquement renforcé, pourvu que les deux branches aient leurs larges faces parallèles à l'orifice. Mais, si on incline l'instrument, de telle sorte que les deux branches cessent de se cacher mutuellement et qu'elles puissent agir isolément sur l'air de la caisse, il arrive un moment où le son s'éteint presque complètement. L'air reçoit alors du mouvement de chacune des deux branches: ces mouvements sont contraires et se détruisent. La preuve qu'il en est ainsi, c'est qu'on entend de nouveau le son si l'on cache l'une des branches avec un carton. Du reste, en faisant vibrer près de l'oreille un diapason que l'on tourne entre les doigts, on a des sons forts ou faibles, suivant que l'onde sonore provient d'une des branches ou des deux branches à la fois.

Si nous prenons la formule des tuyaux fermés,

$$1 + c \tan \pi \frac{l}{\lambda} \tan \pi \frac{l'}{\lambda} = 0,$$

et si nous divisons les deux termes de chaque fraction de π par l , en posant

$$\frac{\lambda}{l} = a \frac{l'}{l} = b,$$

nous aurons

$$1 + c \tan \pi \frac{1}{a} \tan \pi \frac{b}{a} = 0.$$

En donnant certaines valeurs à a , nous en déduirons des valeurs correspondantes de b , et nous pourrions tracer des courbes ayant a et b pour coordonnées. On pourrait à l'aide de ces courbes déterminer facilement les sons que peut rendre un tuyau donné. Elles font voir que pour une même valeur de l et de l' ou de b , qui est l'ordonnée, il y a un nombre infini de sons de plus en plus aigus. J'appellerai *son fondamental* le plus grave; les autres seront les harmoniques. J'ai joint à ce travail les courbes du son grave et des premiers harmoniques dans le cas de $c = 0,376$ et $c = \frac{1}{0,376} = 2,662$, afin de montrer la différence d'allure qu'elles prennent selon que le diamètre du second tuyau est plus petit ou plus grand que celui du premier.

La formule précédente fait voir que si l'on change l en l' et réciproquement, les valeurs de λ ne changent pas. Ainsi :

Dans les tuyaux à cheminées fermées, les sons ne changent pas si on donne au premier tuyau la longueur attribuée d'abord au second, et à ce dernier la longueur primitive du premier.

Voilà un premier énoncé qu'il s'agit de vérifier. Dans tous les tableaux qui suivent, les longueurs sont données en millimètres; l est toujours la longueur du premier tuyau, l' celle du second, L la longueur de la corde du sonomètre, λ la longueur d'onde qu'on en déduit en multipliant L par un facteur, variable avec la température, et qui vers 10 degrés est 1,377, λ' la longueur d'onde calculée à l'aide de la formule, r le rapport $\frac{\lambda}{\lambda'}$; je l'ai inscrit même dans ces premiers tableaux pour m'en servir plus tard, car il est bien évidemment inutile à la vérification de l'énoncé précédent.

SÉRIE I.

Deux tuyaux en zinc.... Diamètre, 31 et 19 millimètres.

$$c = 0,376. \quad t = 13^{\circ}.$$

l	l'	L	λ	λ'	r
200	100	{ 379	523,3	490,2	1,06
100	208	{ 372	513,7	»	1,04
»	»	{ 156	215,5	200	1,07
»	»	{ 165	225,8	»	1,12
»	»	{ 101	139,5	125,9	1,10
»	»	{ 99	136,5	»	1,09
400	200	{ 735	1015	980,4	1,04
200	408	{ 735	1015	»	»
»	»	{ 304	418,6	400	1,04
»	»	{ 306	421,6	»	1,05
»	»	{ 191	263,7	251,9	1,04
»	»	{ 192	265	»	1,05
»	»	{ 129	178	165,7	1,07
»	»	{ 129	178	»	1,07
600	300	{ 455	628,3	600	1,04
300	600	{ 456	629,7	»	1,04
»	»	{ 285	393	377,6	1,04
»	»	{ 284	392	»	1,04
»	»	{ 187	252,7	348,7	1,03
»	»	{ 187	252,7	»	1,03
»	»	{ 147	203	»	»
»	»	{ 147	203	»	»
»	»	{ 128	177,9	165,4	1,07
»	»	{ 125	172,8	»	1,07
300	200	{ 600	828,8	784,8	1,05
200	300	{ 600	828,8	»	»
200	300	{ 270	373	354,6	1,06
200	300	{ 271	374,4	»	»
200	300	{ 152	209,9	200	1,05
»	»	{ 152	209,9	»	1,05
600	400	{ 545	753	709	1,06
400	600	{ 546	754,4	»	1,06
»	»	{ 304	420	400	1,05
»	»	{ 305	421	»	»
»	»	{ 210	290	»	»
»	»	{ 210	290	»	»
»	»	{ 172	237,5	»	»
»	»	{ 172	237,5	»	»
»	»	{ 136	187,2	»	»
»	»	{ 136	187,2	»	»

Tuyaux en zinc... Diamètre, 51 et 19 millimètres.

$$c = 0,1362.$$

l	l'	L	λ	λ'	r
200	400	307	426	400	1,06
400	200	303	417	»	1,04
»	»	645	896	866	1,03
»	»	675	937	»	1,08
»	»	120	166	162	1,02
»	»	124	172	»	1,06
300	600	1000	1390	1299	1,07
600	300	990	1374	»	1,06
»	»	315	437	390	1,1
»	»	300	416	»	1,06
»	»	189	262	243	1,08
»	»	189	262	»	»
»	»	155	215	»	»
»	»	150	208	»	»
300	400	202	280	280	1
400	300	205	284	»	1
»	»	417	576	540	1,07
»	»	415	576	»	1,07
»	»	705	979	916	1,06
»	»	705	979	»	1,06
500	400	205	284	»	»
400	500	205	284	»	»
»	»	256	360	340	1,06
»	»	257	357	»	1,06
»	»	545	757	718	1,05
»	»	550	764	»	1,05

Tuyaux en zinc... Diamètre, 51 et 31 millimètres.

$$c = 0,362.$$

600	200	254	353	332	1,06
200	600	253	354	»	1,06
»	»	365	504	491	1,04
»	»	367	507	»	1,04
400	600	209	289	»	»
600	400	207	286	»	»
»	»	540	746	702	1,06
»	»	530	732	»	1,04
400	200	195	267	258	1,03
200	400	191	261	»	1,03
»	»	305	414	400	1,03
»	»	310	421	»	1,05
»	»	740	1022	960	1,05
»	»	730	1009	»	1,04

Le principe énoncé se vérifie, on le voit. La concordance des nombres est moindre pour des tuyaux de grands diamètres, moindre pour des tuyaux de petites longueurs.

Il y a cependant une remarque importante à faire. Lorsqu'on veut faire sortir avec pureté les sons divers que donne un tuyau, il faut faire varier convenablement la distance du biseau à la lumière de l'embouchure. Les harmoniques élevés sortent d'abord, puis, en écartant le biseau, on entend des sons de plus en plus graves, et enfin le son fondamental. En augmentant encore la largeur de l'embouchure, on entend de nouveau, sous une pression plus faible, la série des sons harmoniques terminés par le son fondamental, et ensuite une nouvelle série recommence. Ces trois séries ne sont pas identiques; les sons analogues sont d'autant plus aigus que l'embouchure est plus large, et la différence est surtout marquée pour de petites longueurs de tuyaux. Ce résultat s'explique aisément. Pour que l'embouchure fût un ventre de vibration, comme la théorie le suppose, il faudrait qu'elle fût entièrement libre, et il n'en est rien. La pièce qui porte la fente est nécessairement voisine de l'orifice du tube, et cela change la nature de l'onde sonore qui rencontre un corps solide au lieu de la masse indéfinie de l'atmosphère. De là un abaissement de ton d'autant plus grand que l'embouchure est plus étroite. La longueur du tuyau est-elle faible, les différences des longueurs d'onde peuvent atteindre ou dépasser 0,1 de leur valeur.

Ainsi, avec un tuyau de 31 millimètres de diamètre et une longueur de 100 millimètres, j'ai obtenu pour λ :

249,5	l'embouchure ayant une largeur de 3 ^{mm}
229,2	» » » 7

Longueur 200 :

483	l'embouchure ayant une largeur de 5 ^{mm}
463	» » » 10

Pour de grands tuyaux la différence est moindre.

Longueur 1000, second harmonique :

428	l'embouchure ayant une largeur de 4 ^{mm}
423	» » » 10

Longueur 600, premier harmonique :

427	l'embouchure ayant une largeur de 5 ^{mm}
418	» » » 10

Il y a donc dans les résultats que l'on peut obtenir une certaine élasticité, suivant qu'on emploiera des embouchures larges ou étroites. Avec celles-ci les sons sont plus intenses, et en les employant on se rapproche des conditions ordinaires de la fabrique d'orgues; avec celles-là, on satisfait mieux aux conditions de la théorie.

Pour composer les premiers tableaux, j'ai choisi pour chaque groupe les sons les plus rapprochés, en ne tenant aucun compte des différences d'embouchure. Souvent, surtout pour les sons graves, l'un des sons est obtenu avec une embouchure étroite, c'est d'ordinaire celui qui correspond à la plus grande valeur de l , l'autre avec une embouchure large.

Si l'on voulait se placer dans les mêmes circonstances, prendre par exemple les sons intenses qui répondent aux embouchures étroites, on trouverait (Série II) que l'inversion des longueurs change le son, surtout si la longueur du tuyau embouché est faible : le son le plus grave répond à la plus petite valeur de l . La longueur du tuyau, si elle n'est pas très-petite, semble sans influence. Ces différences s'expliquent, si on remarque que l'influence de l'embouchure varie avec la longueur et le diamètre des tuyaux dans les tuyaux ordinaires. Il n'est pas étonnant qu'il en soit de même pour les tuyaux mixtes.

SÉRIE II.

$$c = 0,1365. \quad t = 15^\circ.$$

l	l'	L	λ
200	400	325	451
400	200	303	420
300	600	490	680
600	300	430	597
»	»	185	256
»	»	180	249
300	400	202	280
400	300	212	294
»	»	430	597
»	»	415	576
500	400	265	368
400	500	257	357

$$c = 0,362. \quad t = 13^\circ.$$

200	400	319	441
400	200	300	414
400	600	215	297
600	400	207	286
200	600	258	361
600	200	254	352
»	»	380	525
»	»	365	504

Ainsi, en prenant deux tuyaux dont les parties ont des longueurs inverses les unes des autres, il est possible, comme la théorie l'indique, de leur faire rendre le même son. Si les embouchures sont analogues, les deux sons présentent des

différences qui semblent tenir surtout au mode d'embouchure. Du reste, les sons obtenus sont toujours plus graves qu'ils ne devraient l'être en théorie.

Lès tuyaux ouverts conduiraient à quelque chose d'analogue. La formule est alors

$$c \tan \pi \frac{l}{\lambda} + \tan \pi \frac{l'}{\lambda} = 0;$$

changeons à la fois l en l' et c en $\frac{1}{c}$, et λ restera le même. C'est-à-dire :

Dans un tuyau mixte ouvert on peut emboucher indifféremment l'un ou l'autre des tuyaux qui le composent sans changer le son.

Cette conséquence est moins curieuse que la précédente. Ici la masse d'air qui vibre reste la même, tandis que pour les tuyaux fermés elle change beaucoup avec l'inversion des longueurs.

Voici quelques expériences qui vérifient l'énoncé précédent :

SÉRIE III.

Tuyaux ouverts. $c = 0,1365$.

l	l'	L	λ
200	400	207	286
»	»	545	753
400	400	200	273
»	»	298	412
»	»	600	829
400	600	180	246
400	600	333	460
»	1000	207	287
»	»	277	384
»	»	317	436
»	»	498	692
600	200	115	160
»	»	301	279
»	»	485	673

$$c = 7,347 = \frac{1}{0,1365}.$$

400	200	208	287
»	»	577	797
400	400	202	276
»	»	301	416
»	»	600	829
600	400	180	249
»	»	333	460
1000	400	205	284
»	»	276	383

l	l'	L	λ
1000	400	317	436
»	»	495	691
200	600	120	167
»	»	315	298
»	»	495	687

$$c = 2,662 = \frac{1}{0,376}.$$

l	l'	L	λ	λ'	r
200	200	153	212	200	1,04
»	»	307	426	400	1,06
400	400	200	278	266	1,04
»	»	300	417	400	1,04
600	600	151	210	200	1,05
»	»	182	253	240	1,05
»	»	224	311	300	1,036
»	»	450	625	600	1,04
600	300	112	156	»	»
»	»	140	194	»	»
»	»	165	229	»	»
»	»	225	312	300	1,04
»	»	365	507	486	1,04

$$c = 0,376.$$

200	200	152	211	200	1,05
»	»	309	429	400	1,07
400	400	200	278	266	1,04
»	»	302	420	400	1,05
600	600	150	209	200	1,045
»	»	182	253	240	1,05
»	»	225	312	300	1,04
»	»	455	632	600	1,05
300	600	112	156	»	»
»	»	140	194	»	»
»	»	165	229	»	»
»	»	228	316	300	1,05
»	»	364	506	486	1,04

Reprenons les équations de nos courbes :

$$1 - c \operatorname{tang} \frac{\pi}{a} \operatorname{tang} \frac{\pi b}{a} = 0, \quad c \operatorname{tang} \frac{\pi}{a} + \operatorname{tang} \frac{\pi b}{a} = 0.$$

Il est clair que si l'on donne à b une valeur constante, on aura toujours les mêmes valeurs de a . On a dès lors une loi analogue à celle des tuyaux simples.

Si on établit un rapport constant entre les longueurs des tuyaux simples qui composent un tuyau à cheminée, les nombres des vibrations des sons obtenus seront en raison inverse des longueurs de l'un des deux tuyaux.

J'ai réuni ici les valeurs de $\frac{\lambda}{l}$ déduites des nombres inscrits dans les tableaux qui précèdent.

$c = 0,376.$

200	100	2,655	1,077	0,697	»
400	200	2,39	1,046	0,639	0,445
600	300	»	1,067	0,622	0,428

$c = 0,1365.$

200	400	»	2,13	0,83	»
300	600	»	2,10	0,87	»

$c = 0,362.$

200	200	3,23	1,61	0,693	»
400	400	3,17	1,58	0,620	»

SÉRIE IV.

Tuyaux fermés en verre de 25 et 15 millimètres. $t = 10^\circ$. $c = 0,357.$

l	l'	L	2λ	$\frac{\lambda}{l}$	L	2λ	$\frac{\lambda}{l}$	L	2λ	$\frac{\lambda}{l}$	L	2λ	$\frac{\lambda}{l}$
200	200	116	319,4	0,798	233	641,7	1,604	»	»	»	»	»	»
300	300	170	468,2	0,780	236	925,3	1,584	670	1845	3,075	»	»	»
400	400	225	605,5	0,757	450	1211,3	1,513	890	2451	3,063	»	»	»
600	600	330	908,2	0,757	»	»	»	»	»	»	267	755,8	0,612
800	800	445	1225,8	0,766	»	»	»	»	»	»	355	977,7	0,611
200	100	102,5	282,3	0,705	150	413,1	1,03	370	1019	2,53	»	»	»
300	150	146	402,1	0,673	227	625,2	1,04	541	1490	2,48	»	»	»
400	200	191	526	0,657	297	807,9	1,02	715	1669	3,46	»	»	»
800	400	381	1049	0,655	»	»	»	»	»	»	»	»	»
200	400	306	833,1	2,082	»	»	»	»	»	»	»	»	»
400	800	595	1638,6	2,045	»	»	»	»	»	»	»	»	»
400	100	150	413,1	0,516	225	619,6	0,774	651	1793	2,28	»	»	»
600	150	224	616,9	0,514	336	925,3	0,771	1008	2776	2,31	»	»	»
800	200	298	820,7	0,513	442	1217,2	0,760	»	»	»	»	»	»

Tuyaux ouverts en gutta de 30 millimètres, en verre de 15^{mm}, 8. $c = 0,2774.$

200	200	165	227	1,13	»	»	»	»	»	»	»	»	»
300	300	242	333	1,10	»	»	»	»	»	»	»	»	»
500	500	375	516	1,03	»	»	»	»	»	»	»	»	»
200	100	288	397	1,98	»	»	»	»	»	»	»	»	»
500	250	664	914	1,83	263	362	0,72	187,5	358	0,51	150	306	0,413
800	400	»	»	»	»	»	»	302	416	0,51	234	322	0,402
1000	500	»	»	»	525	723	0,72	»	»	»	294	405	0,405

On trouverait un grand nombre d'autres vérifications dans la Série VI.

Tous ces nombres nous amènent à conclure que la loi énoncée se vérifie à très-peu près. Les différences qui existent entre la valeur de $\frac{l}{\lambda}$ affectent généralement le second chiffre décimal. Elles sont moindres pour les tuyaux ouverts, elles atteignent leur plus grande valeur pour des tuyaux de faible longueur. Nous les retrouverons du même ordre pour les tuyaux ordinaires.

Les formules

$$1 - c \tan \pi \frac{l}{\lambda} \tan \pi \frac{l'}{\lambda} = 0, \quad c \tan \pi \frac{l}{\lambda} + \tan \pi \frac{l'}{\lambda} = 0$$

sont facilement résolubles dans un petit nombre de cas particuliers.

Prenons la première, qui répond aux tuyaux fermés : donnons aux deux portions du tuyau la même longueur $l = l'$, nous aurons

$$\tan \pi \frac{l}{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{c}};$$

soit a la plus petite valeur de $\pi \frac{\lambda}{l}$, nous en tirerons

$$\lambda = l \frac{\pi}{n\pi \pm a}.$$

Prenons $c = 0,376$, c'est-à-dire les deux tuyaux en zinc de 31 et 19 millimètres de diamètre. Les valeurs de $\frac{\lambda}{l}$ sont : 3,077; 1,481; 0,755; 0,430; 0,374; 0,301.

Voici les nombres que donne l'expérience :

SÉRIE V.

$c = 0,376. \quad t = 13^\circ.$

l	L	λ	λ'	r
100	243	335,6	307,7	1,09
»	120	166	148,1	1,10
200	118	163	150,9	1,08
»	225	311	296,2	1,01
»	474	655	615,4	1,06
300	134	185	179,1	1,02
»	168	232	226,1	1,02
»	338	467	444,3	1,05
»	695	960	923,1	1,04
400	131	181	172	1,05
»	182	251	238,8	1,04
»	452	596	592,4	1,008
600	136	187,8	180,6	1,04
»	168	232	224	1,03
»	266	367	358	1,02
»	335	462,5	452,8	1,02
»	655	904	886,6	1,02

J'ai pris deux tuyaux en zinc de 51 et 31 millimètres. La valeur de c , rapport des surfaces, est à peu près la même que dans le cas qui précède $c = 0,362$. Il n'y a de changé que les diamètres des deux tuyaux.

$$c = 0,362. \quad t = 13^\circ.$$

l	L	λ	λ'	r
200	126	138,6	119,2	1,1
»	232	322	294	1,09
»	472	655	620	1,06
400	180	250	238	1,05
»	228	317	302	1,04
»	445	632	588	1,07
»	914	1270	1240	1,02
600	195	271	258	1,05
»	267	371	357	1,03
»	335	465	453	1,02
»	665	921	882	1,04

$$c = \frac{1}{0,362} = 2,760.$$

200	132	182	170,6	1,06
»	185	256	242	1,06
»	900	1243	1160	1,07
400	111	153	141,6	1,08
»	171	236	218,8	1,08
»	357	493	484	1,02
»	248	342,5	341,2	1,00
600	118	163	156,6	1,03
»	161	222	212,4	1,04
»	203	280	276,0	1,02
»	244	337	328,2	1,03
»	377	520,6	511,8	1,01

Avec les tuyaux ouverts, la formule

$$c \tan \pi \frac{l}{\lambda} + \tan \pi \frac{l'}{\lambda} = 0$$

donne, quand on fait $l = l'$,

$$\tan \pi \frac{l}{\lambda} (1 + c) = 0 \quad \text{ou} \quad \tan \pi \frac{l}{\lambda} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{l}{n},$$

qui ne donne pas tous les sons que le tuyau peut rendre. Cette formule est une transformation de celle-ci, donnée par Poisson :

$$(1 + c) \sin \pi \frac{l + l'}{\lambda} - (1 - c) \sin \pi \frac{l - l'}{\lambda} = 0.$$

De celle-ci on tire

$$2 \cos \pi \frac{l}{\lambda} \cos \pi \frac{l'}{\lambda} \left(c \tan \pi \frac{l}{\lambda} + \tan \pi \frac{l'}{\lambda} \right) = 0;$$

faisant $l = l'$, on a

$$(1 + c) \sin \pi \frac{2l}{\lambda} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{2l}{n}.$$

On a donc *la série des sons que rendrait un tuyau simple ouvert, dont la longueur serait égale à la longueur totale du tuyau mixte.*

Dans ce cas, le changement de diamètre des deux portions de tuyau n'a pas d'influence. Nous remarquerons qu'il y a alors un nœud ou un ventre à la surface de séparation des deux tuyaux. Si nous cherchons dans quel cas le nœud est ainsi placé, nous retrouvons $\lambda = \frac{2l'}{n}$, qui coïncide ici avec la condition précédente, puisque $l' = l$. Le nœud pourrait occuper la même place dans bien d'autres systèmes de tuyaux, mais seulement pour un des harmoniques.

Outre les nombres inscrits dans la Série III, nous citerons encore les résultats suivants :

SÉRIE VI.

$$c = 0,376.$$

l	L	λ	λ'	r
100	165	228	200	1,14
»	170	235	»	1,17
300	153	211,4	200	1,04
»	227	314	300	1,05
»	452	624	600	1,05
400	122	168	160	1,05
»	198	273	266	1,03
»	600	828	800	1,035
500	110	152	150	1,01
»	148	204	200	1,02
»	249	344	333	1,03
»	372	513	500	1,026
»	755	1042	1000	1,04
600	295	407	400	1,02
»	890	1230	1200	1,025

$$c = 2,662.$$

200	105	146	133	1,09
400	100	139	133	1,04
»	149	208	200	1,04
600	113	157	150	1,04

$$c = 0,1365.$$

l	L	λ	l'	r
100	180	248,6	200	1,24
»	202	279	»	1,39
200	115	159	150	1,06
»	158	211	200	1,055
»	310	428	400	1,07
200	336	464	400	1,16
300	160	221	200	1,10
»	230	317,5	300	1,06
»	465	632	600	1,05
»	489	675	600	1,12
400	125	173	160	1,02
»	305	421	400	1,05
»	600	829	800	1,03
»	615	850	800	1,06
500	158	218	200	1,09
»	260	359	333	1,08
»	775	1070	1000	1,07
600	305	421	400	1,05
»	907	1252	1200	1,045
800	237	327	320	1,02
»	400	552	533	1,03
»	1200	1658	1600	1,04
1000	215	297	285	1,04
»	300	414	400	1,035
»	508	702	666	1,05

Les formules sont encore résolubles lorsqu'on y fait $l = 2l'$ ou $l' = 2l$.

Dans les tuyaux fermés, pour $l = 2l'$, on a

$$\tan \pi \frac{l'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{1 + 2c}},$$

et en outre

$$\lambda = \frac{1}{2n + 1}.$$

Cette dernière s'obtient à l'aide de la formule

$$(1 + c) \cos \pi \frac{l + l'}{\lambda} + (1 - c) \cos \pi \frac{l - l'}{\lambda} = 0,$$

qui sert à trouver la seconde formule

$$1 - c \tan \pi \frac{l}{\lambda} \tan \pi \frac{l'}{\lambda} = 0;$$

de même, pour $l' = 2l$, on aura

$$\operatorname{tang} \pi \frac{l}{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{1+2c}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{2l}{2n+1}.$$

Si le tuyau est ouvert, on a

$$l = 2l', \quad \operatorname{tang} \pi \frac{l'}{\lambda} = \sqrt{1+2c} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{l}{2n},$$

$$l' = 2l, \quad \operatorname{tang} \pi \frac{l}{\lambda} = \sqrt{\frac{2+c}{c}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{l}{n}.$$

On voit que si on donne au second tuyau une longueur double du premier, on aura tous les sons que rendrait le premier sonnant seul; lorsque le second tuyau a la moitié de la longueur du premier, on a les sons rendus par la moitié du premier résonnant seul: ils sont à l'octave des précédents. Dans les deux cas, on a encore d'autres sons qui dépendent alors du rapport des surfaces des tuyaux employés.

J'ai cherché directement si, en donnant au second tuyau une longueur double du premier, on reproduit les sons de celui-ci.

Voici quelques résultats :

$c = 0,3594$, on a deux tubes en verre;

$$l = 200 \quad l' = 0 \quad L = 303$$

$$l' = 400 \quad L = 298$$

$$l = 300 \quad l' = 0 \quad L = 453$$

$$l' = 600 \quad L = 448$$

$c = 0,1307$

$$l = 400 \quad l' = 0 \quad L = 195$$

$$l' = 800 \quad L = 195$$

Les sons aigus changent peu rapidement lorsqu'on fait varier la longueur l' . Cette dernière expérience a donc moins de valeur qu'on ne pourrait le supposer :

$c = 0,3605$

$$l = 400 \quad l' = 0 \quad L = 600$$

$$l' = 800 \quad L = 595$$

$$l = 200 \quad l' = 0 \quad L = 320$$

$$l' = 400 \quad L = 306$$

Ainsi, les sons changent quand on passe de $l' = 0$ à $l' = 2l$. Cela n'a pas lieu de nous surprendre, puisque dans les tuyaux ordinaires $2l$ ne représente jamais la quantité que nous appelons λ .

Si on cherche pour quelle longueur l' le son du tuyau primitif se trouve reproduit, on voit que c'est lorsque l' égale la longueur d'onde réelle. On en aura plus loin la preuve.

Voyons comment se vérifie l'énoncé précédent.

On trouvera des expériences qui s'y rapportent dans les Séries I et II.

SÉRIE VII.

Tuyaux fermés. $c = 0,362$.

l	l'	L	λ	λ'	r
200	100	158	218	200	1,09
»	»	370	511	482	1,06
400	200	195	269	252	1,07
»	»	300	414	400	1,07
»	»	740	1022	964	1,06

 $c = 0,1365$.

200	100	341	472,6	433	1,06
»	»	356	494	»	1,1
400	800	207	287	266	1,08
»	»	605	840	800	1,05
500	1000	250	347	333	1,04
»	»	300	416,6	405	1,03
»	»	760	1054	1000	1,05

Tuyaux ouverts. $c = 0,376$.

100	200	200	276	263	1,05
»	»	213	294	»	»
200	400	247	361	308	1,05
»	»	149	206	200	1,03
»	»	400	552,5	526	1,05
»	»	408	560	»	1,06
400	800	220	304	290	1,06
»	»	300	414	400	1,035
»	»	490	677	616	1,09
»	»	800	1105	1052	1,05
200	100	115	159	141	1,10
»	»	272	375	541	1,10
400	200	120	165	154,6	1,06
»	»	151	208,6	200	1,04
»	»	213	294	282	1,04
»	»	518	715	682	1,049
600	300	175	240	231,9	1,03
»	»	225	311	300	1,036
»	»	314	434	423	1,03
»	»	780	1070	1023	1,05

$$d \approx 0,1365.$$

l	l'	L	λ	λ'	r
100	200	192	256,5	236	1,10
200	400	267	371	346	1,07
»	»	368	511	472	1,09
400	800	130	180	165	1,09
»	»	216	299,3	281,6	1,08
»	»	299	416	400	1,04
»	»	528	731,5	692	1,05
»	»	735	1020	944	1,08
500	1000	157	218	206	1,06
»	»	232	322	317	1,01
»	»	265	368	352	1,05
»	»	658	914	865	1,05
»	»	915	1270	1180	1,08
200	100	290	400	372	1,07
400	200	212	293	274	1,07
»	»	568	788	744	1,06
800	400	175	243	230	1,05
»	»	238	330	315	1,04
»	»	410	568	548	1,04
»	»	1200	1660	1488	1,10
1000	500	216	299	288,6	1,04
»	»	295	410	394	1,04
»	»	510	708	685	1,02
»	»	1470	2014	1860	1,08

$$c = 7,347 = \frac{1}{0,1365}.$$

200	400	153	212	200	1,06
»	»	207	286	274	1,04
»	»	545	753	744	1,01
300	600	80	110	109	1,01
»	»	225	311	300	1,03
»	»	303	419	411	1,02
»	»	830	1145	1116	1,02

On voit, en consultant les Séries de V à VII, que les tuyaux rendent des sons constamment plus graves que ceux qu'indique la théorie. La différence est surtout grande pour les petits tuyaux et les embouchures étroites. L'onde est alors 1,1 la 4.

longueur théorique. Pour de plus grandes longueurs, le rapport varie de 1,16 à 1,08. En moyenne :

Tuyaux fermés....	$c = 0,376$	1,03
	$c = 0,1365$	1,05
Tuyaux ouverts...	$c = 0,376$	1,04
	$c = 0,1365$	1,05

Dans l'un des cas, on a deux tuyaux de 31 et 99 millimètres ; dans l'autre, de 51 et 19 millimètres.

L'influence de la valeur de c est donc assez faible. Cependant, il semble que le son obtenu soit plus loin du son théorique, lorsqu'il y a une grande différence entre les diamètres des deux tuyaux. L'influence du diamètre même des tuyaux est peu marquée dans le cas où le diamètre dépasse 20 millimètres, car les résultats obtenus avec les tuyaux de 31 et 19 millimètres, $c = 0,376$, sont à peu près les mêmes que ceux que donneraient les tuyaux de 51 et 31 millimètres, $c = 0,362$.

DEUXIÈME SECTION.

POSITION DES VENTRES ET DES NOEUDS.

Reprenons les formules théoriques (1) à (6).

Lorsque le son est donné et que l'on connaît la longueur d'onde λ , on peut, à l'aide des formules de Poisson, calculer la position des nœuds et des ventres dans la colonne d'air et vérifier ces formules par expérience.

Si l'on ferme un tuyau en un point tel, que le nouveau tuyau rende le même son que l'ancien, la position du piston, de la cloison que l'on emploie, est-elle celle du nœud de la première colonne ? Bernoulli le pensait, Savart en doute, Masson le nie complètement. La masse d'air en vibration se trouve changée et peut-être aussi le mode de partage de la colonne ; les vibrations communiquées au piston réagissent sur celles de l'air et les troublent : les surfaces nodales ne sont peut-être pas planes et perpendiculaires à l'axe du tuyau (expériences de Savart), et le piston ne peut dès lors coïncider avec elles. Les expériences de MM. Desains et Lissajoux sur la position des nœuds dans un tuyau amoindrissent la valeur de ces objections.

permettent de penser que la position du piston est toujours voisine du nœud; si elle ne coïncide pas avec lui. En fermant les tuyaux avec une colonne d'eau, il m'était si facile de déterminer la position présumée des nœuds, que j'ai fait un grand nombre d'observations de ce genre.

Je vais en citer quelques-unes. J'appelle y la distance du nœud au point de jonction des deux tuyaux donnée par l'expérience, y' la distance calculée; à la suite se trouve la différence $y' - y$.

La position des ventres a été déterminée dans des tuyaux en gutta-percha que l'on pouvait percer facilement au point convenable.

Dans les expériences qui suivent, on s'est attaché à conserver à l'embouchure la même largeur et à la soufflerie la même pression.

SÉRIE VIII.

Tuyaux fermés en verre de 25 millimètres et de 9^{mm},5. $c = 0,1307$.

l	l'	t	L	λ	Nœuds du 1 ^{er} tuyau.		Différence.	Nœuds du 2 ^e tuyau.		Différence.
					y	y'		y	y'	
300	0	20°	440	616,5	»	»	»	610	616,4	6,05
»	»	16	147	204,2	»	»	»	610	612	2
»	200	15	147	206,2	7	5	2	404	408	4
»	»	»	»	»	»	»	»	404	408	4
»	300	»	161	223,6	210	207	3	78	77	1
»	450	»	418	580,5	22	20	2	»	»	»
»	»	»	149	207	200	200	8	37	36	1
400	0	17	193	269	»	»	»	266	269	3
»	160	»	248	345,5	248	253	5			
»	600	»	563	784,5	25	29	4			
500	200	16	230	319,5	27	30	3			
»	700	»	693	962,5	41	46	5			
600	0	18	293	409	400	409	9			
»	200	»	258	360,5	411	444	3			
»	400	»	173	239	493	496	3			
700	600	16	353	485	568	473	5			
800	400	»	388	539	21	23	2			

Tuyaux fermés : tubes en gutta de 20 millimètres, et en verre de 14^{mm}, 9.

$$c = 0,558. \quad t = 8^{\circ}.$$

<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>L</i>	λ	Nœuds du 2 ^e tuyau.		Différence.	Nœuds du 1 ^{er} tuyau.		Différence.	Ventres.
				<i>y</i>	<i>y'</i>		<i>y</i>	<i>y'</i>		<i>y</i> observe.
300	100	535	736,5	756	746	10	»	»	»	»
»	»	191	261,5	358	361	3	180	181	1	50
»	200	260	304,8	554	554	0	129	138	9	»
»	»	153	209	405	409	4	207	214	7	102
»	500	169	230,5	»	»	»	193	198	5	78
500	50	265	364,9	360	364	4	333	336	3	151
»	100	280	385,5	481	485	4	321	330	9	»
»	300	410	563	»	»	»	241	248	7	»
»	»	238	326,8	»	»	»	345	341	4	176
»	»	167	229	»	»	»	174	179	5	288
»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	60
700	500	362	476,9	475	479	4	462	466	4	215
»	200	420	574	»	»	»	428	424	4	»
»	»	273	394,9	370	375	5	163	165	2	350
»	»	»	»	»	»	»	533	540	7	»
»	400	335	460	»	»	»	484	490	6	262
»	»	»	»	»	»	»	38	35	3	»
»	800	325	446,3	357	354	3	51	57	6	265
»	»	205	281,5	242	247	5	19	25	6	»
»	»	»	»	»	»	»	297	306	9	»

Deux tuyaux : l'un en gutta de 20 millimètres, l'autre en verre de 7^{mm}, 9.

$$c = 0,1137. \quad t = 8^{\circ}.$$

<i>l</i>	<i>l'</i>	<i>L</i>	λ	Nœuds du 1 ^{er} tuyau.		Différence.
				<i>y</i>	<i>y'</i>	
703	10	368	505,5	465	479	14
»	20	225	309	252	258	6
»	»	»	»	557	567	10
»	100	255	350	200	206	6
»	»	»	»	546	556	10
»	»	176	240,7	120	128	8
»	»	»	»	360	369	9
»	»	»	»	598	610	12
»	200	485	666	383	388	5
»	»	266	365	175	176	1
»	»	»	»	535	540	5

l	l'	L	λ	Nœuds du 1 ^{er} tuyau.		Différence.
				y	y'	
703	200	187	250,9	88	96	6
»	300	515	707	365	386	17
»	»	215	295	275	282	7
»	»	173	215,3	130	137	7

Deux tuyaux : l'un en verre de 25 millimètres, l'autre en fer-blanc de 360 millimètres.

$$c = 7,817. \quad t = 14^{\circ}.$$

925	14	510	712,7	595	611	16
»	»	307	423,3	322	332	10
»	»	218	300,6	204	218	14
»	54	591	817	535	554	19
»	104	341	471,6	248	258	10
»	154	640	890	493	504	11
»	204	655	911	485	490	5
»	»	348	480	233	244	11
»	304	665	925	475	485	10
»	»	353	486	225	237	12
»	»	242	333,7	118	122	4
»	404	680	946	465	480	15

SÉRIE IX.

Tuyaux ouverts : tuyau en gutta de 30 millimètres, en verre de 7 millimètres.

$$c = 0,054. \quad t = 6^{\circ}.$$

l	l'	e	L	λ	y	y'	Différence.
700	50	6	862	1178,5	138	144	6
»	»	6	335	458	480	480	0
»	»	3	343	469	482	489	7
»	»	3	209	285,7	575	578	3
»	100	6	340	414,8	478	478	0
»	»	3	347	474,4	476	482	6
»	200	6	346	473	472	475	3
»	»	3	349	477	475	480	5
»	»	6	214	292,5	564	578	14
»	400	6	1050	1435,5	10	20	10
»	»	»	355	485,1	465	475	10
»	»	3	360	496	470	481	11
»	»	6	210	298	570	575	5

La colonne e renferme la largeur de l'embouchure. On voit que les embouchures étroites donnent des résultats plus éloignés de la théorie.

Tuyau en gutta de 30 millimètres, en verre de 16 millimètres. $c = 0,284$. $t = 9^\circ$.

l	l'	L	λ	Nœuds du 1 ^{er} tuyau.		Différence.
				γ	γ'	
700	50	665	916	260	265	5
»	100	325	446,7	485	496	11
»	»	207	295,5	577	581	4
»	200	215	301	565	573	8
»	»	348	478,4	578	581	3
»	»	830	1141	143	152	9
»	300	197	270,8	577	585	8
»	»	355	487,7	465	471	6

Tuyau en gutta de 20 millimètres, en verre de 14^{mm},8. $c = 0,547$. $t = 8^\circ$.

l	l'	L	λ	Nœuds du 1 ^{er} tuyau.		Différence.	Ventres du 1 ^{er} tuyau.		
				γ	γ'		γ	γ'	
700	50	295	403,3	100	119	19	301	320	Le tuyau ouvert à cette place donne des battements avec le sonomètre.
»	»	193	262,8	44	55	11	175	186	
»	»	»	»	307	318	11	438	»	
»	100	316	435,3	56	77	21	270	294	Id.
»	150	325	444,3	40	42	2	264	264	
»	»	210	287,1	277	283	6	421	427	Id.
»	»	»	»	»	»	»	133	139	
»	200	337	462,8	17	17	0	»	»	Id.
»	»	»	»	477	479	2	»	»	
»	»	217	298	265	268	3	119	121	Id.
»	»	165	226,6	369	383	14	479	495	
»	368	385	526,5	450	463	13	200	213	Id.
»	»	266	363,5	170	170	0	352	352	
»	»	»	»	528	533	5	»	»	Id.
»	»	201	274,8	20	26	6	157	164	
»	»	»	»	»	»	»	432	»	

Les ventres sont à distance d'une demi-longueur d'onde du nœud inférieur. La distance de deux ventres est d'une longueur d'onde. La distance de deux nœuds est moindre.

Deux tuyaux : l'un en gutta de 20 millimètres, l'autre en fer-blanc de 83 millimètres.

$$c = 7,722. \quad t = 8^{\circ}.$$

l	l'	L	λ	Nœuds du 1 ^{er} tuyau.		Différence.	Ventres du 1 ^{er} tuyau.		
				γ	γ'		γ	γ'	
705	109	565	776	332	345	23	»	»	Le tuyau ouvert à cette place donne des battements avec le sonomètre.
»	»	285	391,3	512	535	13	317	339	
»	»	200	274,5	36	56	20	»	»	
»	200	587	806	305	314	»	»	»	
»	»	330	443	38	46	»	»	»	
»	»	238	328	222	233	11	385	397	Id.
»	434	460	631,5	400	417	17	»	»	
		273	375	150	164	14	335	351	Id.
		213	292,5	275	295	20	421	441	Id.

Deux tuyaux : l'un en gutta de 20 millimètres, l'autre en zinc de 41 millimètres.

$$c = 4,202. \quad t = 8^{\circ}.$$

l	l'	L	λ	Nœuds du 1 ^{er} tuyau.		Différence.
				γ	γ'	
700	52	529	726,5	354	350	4
»	»	273	375,7	155	169	14
»	»	183	251,3	92	111	19
»	105	550	755,5	337	351	14
»	»	278	381,7	145	154	9
»	219	249	342	202	233	21
»	333	640	879	270	289	19
»	»	260	357	179	184	5

Lorsque c est plus grand que 1, les différences sont constamment plus fortes que dans les autres cas, tant pour la position des nœuds que pour celle des ventres.

On voit que dans aucun cas le nœud ne se forme à la place que lui assigne la théorie, il est plus près du fond qu'il ne devrait l'être, et même l'écart est d'autant plus grand que l'on détermine un nœud plus voisin de l'embouchure. On change alors considérablement la grandeur de la masse d'air qui vibre, et l'embouchure vient apporter là son influence variable avec la longueur du tuyau. La détermination des ventres de vibration à l'aide de trous percés dans le tuyau convient donc mieux dans la comparaison que nous voulons établir entre l'expérience et la théorie. Or, là évidemment, les trous percés aux places que donne la formule ne conviennent pas. Le son se trouve changé. On a des battements avec le sonomètre. Perce-t-on le tuyau à une demi-longueur d'onde du nœud inférieur, le son ne varie

pas. S'il y a plusieurs ventres, ils sont tous à une longueur d'onde les uns des autres, et la portion la plus voisine de l'embouchure à une longueur moindre, comme dans les tuyaux ordinaires. On peut dire du reste que dans les deux colonnes d'air qui se suivent, la division des masses vibrantes se fait comme si chacune d'elles était isolée. Ainsi, dans le second tuyau, on trouve un nœud à longueur ou à demi-longueur d'onde du fond, suivant que ce tuyau est fermé ou ouvert.

Dans le premier tuyau, c'est à partir de l'embouchure que les nœuds et les ventres se succéderont avec la même régularité que dans un tuyau ordinaire. L'influence de l'embouchure semble de la même nature dans les deux cas.

Pour le montrer d'une manière évidente, je citerai l'expérience suivante. Un tuyau ouvert en gutta de 30 millimètres de diamètre rendait un son tel, qu'il suffisait d'augmenter de 27 millimètres la longueur du tuyau pour faire cesser tout désaccord entre l'expérience et la théorie. On le fait suivre d'un tuyau de 19 millimètres, $c = 0,362$, la température est 11 degrés. Or, on trouve qu'il suffit encore d'augmenter de 27 millimètres la longueur du premier tuyau du côté de l'embouchure, puis de prendre à partir du nouvel orifice la longueur d'onde calculée d'après le son que rend le tuyau mixte, pour avoir la place d'un ventre.

Ainsi, $l = 600$, $l' = 600$, $\lambda = 416$.

En ouvrant un trou à 416 millimètres de l'embouchure, le son change; l'embouchure n'est donc pas un ventre. La formule donne le ventre à 217 millimètres du fond, le son change si on perce un trou à cet endroit; mais il ne change plus si on ouvre le tuyau à 211 millimètres du fond $= 627 - 416$.

$$l = 600, \quad l' = 400, \quad \lambda = 364.$$

La formule place le ventre à 280 millimètres du fond, la règle précédente à 263 millimètres. L'expérience confirme encore la règle.

La division de la colonne d'air se fait donc de la même manière que dans un tuyau simple.

On peut même d'après cela trouver la position des nœuds ou des ventres tout aussi facilement que dans un tuyau ordinaire.

Dans l'un et l'autre cas, la longueur réelle du tuyau embouché est trop courte, si on la compare à la longueur théorique. La différence dépend du diamètre du tuyau et peut être calculée d'après la règle donnée par M. Cavaillé-Coll. Seulement, pour les tuyaux à embouchure circulaire que j'ai employés, on doit modifier le coefficient qui multiplie D ; au lieu de $L = \lambda - \frac{5}{3}D$, que M. Cavaillé-Coll donne pour les tuyaux circulaires à embouchure rectiligne, il faudrait d'après mes expériences prendre $L = \lambda - D$ ou $\lambda - 1,1.D$.

Je n'ai pas fait d'expériences spéciales pour déterminer le facteur qui conviendrait le mieux. La Série X est la seule que j'aie employée. Elle donne 1,2 avec le tube de 19 millimètres de diamètre; 1,1 avec celui de 51 millimètres, ou 0,9 si on emploie de larges ouvertures. Mais, je le répète, le facteur doit être voisin de 1, sans que je puisse en donner exactement la valeur. Mais enfin, en donnant au tuyau embouché la longueur $\lambda - \frac{5}{3}D$, si le tuyau est à embouchure latérale, $\lambda - D$ s'il est à embouchure circulaire, et en prenant à partir de l'embouchure une longueur égale à la longueur d'onde qui correspond à l'harmonique donné par le tuyau, on aura la place du premier ventre, et par suite les autres.

Il faut bien remarquer que près de la jonction des deux tuyaux il y a une portion mixte qui vibre à l'unisson des autres parties et que, d'après la place des nœuds et des ventres, les dimensions de cette portion ne sont pas telles qu'elles devraient l'être théoriquement pour convenir au son observé; la longueur du tronçon du premier tuyau est généralement trop faible. Ce petit tuyau mixte, qui est comme enclavé dans le reste, a toujours d'assez faibles longueurs; or, toutes mes expériences montrent que sous de telles longueurs les sons sont bien plus graves qu'ils ne devraient l'être en théorie. C'est là que l'on obtient les plus grands écarts, et c'est, sans aucun doute, l'effet du trouble particulier qui doit se produire à la jonction des deux tuyaux et que n'ont pas manqué de signaler tous les géomètres qui se sont occupés de la question.

C'est donc pour la même raison que l'on retrouvera, près du fond, une partie vibrante trop courte. Ce raccourcissement est surtout marqué lorsque les tuyaux ont de grandes différences de diamètre, pour les grandes valeurs de c par exemple.

Lorsqu'on vient à faire varier l'embouchure dans les tuyaux mixtes et dans les tuyaux simples, de manière à obtenir les sons les plus intenses, les plus purs; lorsqu'on étudie séparément chaque espèce de tuyaux, il est plus difficile d'apercevoir cette différence que je signalais plus haut.

Les Séries I à VIII comprennent des expériences faites avec des tubes assez larges : le plus petit a 19 millimètres, le plus gros 51 millimètres.

Associés ensemble, ils donnent des sons plus graves qu'ils ne le devraient faire.

Nous avons vu que le rapport de λ variait de 1,1 pour les petits tuyaux à 1,04 pour les grands.

J'ai fait résonner seul chacun des tuyaux, en les prenant tantôt ouverts, tantôt fermés.

Voici les résultats obtenus :

SÉRIE X.

Tuyau de 19 millimètres. $t = 13^{\circ}$.

l	Ouvert.			Fermé.		
	L	λ	r	L	λ	r
100	89	123	1,23	158	174	1,05
200	»	»	»	105	149	1,10
»	»	»	»	300	414	1,07
400	76	105	1,05	122	157	1,10
»	104	144	1,07	199	287	1,08
»	152	210	1,05	600	818	1,02
»	305	421	1,05	»	»	»
600	114	157	1,04	127	154	1,03
»	150	207	1,035	177	242	1,00
»	225	313	1,04	295	407	1,01
»	450	622	1,036	»	»	»
800	151	208	1,04	132	161	1,1
»	202	279	1,04	170	235	1,02
»	300	414	1,035	238	328	1,02
»	602	832	1,04	»	»	»
1000	146	202	1,02	137	168	1,09
»	185	253	1,01	167	231	1,06
»	247	341	1,01	212	293	1,03
»	369	402	1,02	295	407	1,017

Tuyau de 31 millimètres. $t = 12^{\circ},5$.

100	»	»	»	166	229	1,14
»	»	»	»	»	»	»
200	»	»	»	308	425	1,06
»	»	»	»	110	152	1,10
400	310	428	1,07	617	853	1,06
»	»	»	»	203	280	1,06
»	»	»	»	125	173	1,07
500	129	141	1,05	152	210	1,05
»	191	263	1,04	256	354	1,06
»	382	5276	1,05	250	345	1,03
»	»	»	»	760	1050	1,05
600	113,5	157	1,04	180	246	1,02
»	150	207	1,03	183	250	1,04
»	227	314	1,05	296	408	1,02
»	457	631	1,03	302	417	1,06
»	»	»	»	913	1260	1,05

Tuyau de 51 millimètres.

<i>l</i>	Ouvert.			Fermé.		
	<i>L</i>	λ	<i>r</i>	<i>L</i>	λ	<i>r</i>
200	172	259	1,19	331	459	1,15
400	160	222	1,10	212	294	1,10
»	315	437	1,09	625	868	1,17
600	159	221	1,10	135	186	1,08
»	230	319	1,06	183	254	1,01
»	234	325	1,08	303	420	1,05
»	460	637	1,06	310	430	1,07
»	468	651	1,08	915	1260	1,05
800	154	214	1,07	177	246	1,08
»	208	288	1,08	237	329	1,09
»	304	421	1,05	400	554	1,10
»	616	855	1,07	1172	1620	1,01
1000	255	354	1,06	218	302	1,06
»	380	527	1,05	301	417	1,04
»	760	1054	1,05	502	693	1,04

De ces tableaux ressortent les conséquences suivantes. Les sons obtenus s'éloignent d'autant plus des sons théoriques que le diamètre est plus grand, ce que l'on savait. La moyenne des rapports des deux longueurs d'onde est, pour le tuyau de 19 millimètres, 1,027; pour celui de 31 millimètres, 1,045; pour celui de 51 millimètres, 1,058 lorsqu'on prend d'assez grandes longueurs. Ce rapport varie de 1,10 à 1,15 pour les petites; l'influence de l'embouchure se fait sentir plus loin dans les tuyaux larges. Compare-t-on ces résultats à ceux que nous ont donnés les tuyaux mixtes, on voit que l'adjonction du second tuyau a pour effet de diminuer l'influence de l'embouchure dans le cas des petites longueurs. Lorsque les longueurs sont grandes, l'approximation est à peu près la même dans les deux cas. Le tube de 19 millimètres est-il embouché, la moyenne d'un grand nombre d'expériences donne 1,05, plus grand que 1,027, qui convient au tuyau seul.

Si ce sont les deux autres tuyaux, on trouve 1,05 et 1,06, qui ne diffèrent guère de 1,045 et de 1,058, cités plus haut.

De ces expériences, qui sont les plus simples, celles qui comportent le moins d'erreurs, on peut conclure que les tuyaux à cheminée rendent les sons indiqués par la théorie dans les mêmes limites d'approximation que les tuyaux ordinaires.

On peut donc appliquer aux tuyaux à cheminée le mode de correction usité pour les tuyaux ordinaires, c'est-à-dire modifier seulement la longueur du premier tuyau pour tenir compte de l'effet de l'embouchure, comme nous l'avons indiqué plus haut.

Lorsqu'il y a des nœuds et des ventres, ils n'occupent pas la place que la théorie leur assigne, mais celle qu'ils auraient dans des tuyaux isolés de même diamètre que les portions du tuyau mixte, en les comptant, pour le premier tuyau, de longueur modifiée, à partir de l'embouchure; pour le second, à partir du fond. Dans la plupart de mes expériences, la distance de deux nœuds consécutifs (déterminés, on le sait, en fermant le tube avec une colonne d'eau) est plus petite que l'onde calculée d'après la hauteur du son; la différence est d'environ 0,02 de l'onde. Cela semble tenir au faible diamètre de certains de mes tuyaux, car cette anomalie disparaît en employant un tube de 51 millimètres de diamètre. J'ai trouvé, dans ce cas, la distance des nœuds égale à la longueur d'ondulation.

TROISIÈME SECTION.

DÉTERMINATION DU TON OU DES DIMENSIONS D'UN TUYAU A CHEMINÉE.

Nous avons vu dans la première Section que les formules de Poisson pouvaient se mettre sous la forme

$$1 + c \tan \frac{\pi}{a} \tan \pi \frac{b}{a} = 0 \quad \text{et} \quad c \tan \frac{\pi}{a} + \tan \pi \frac{b}{a} = 0,$$

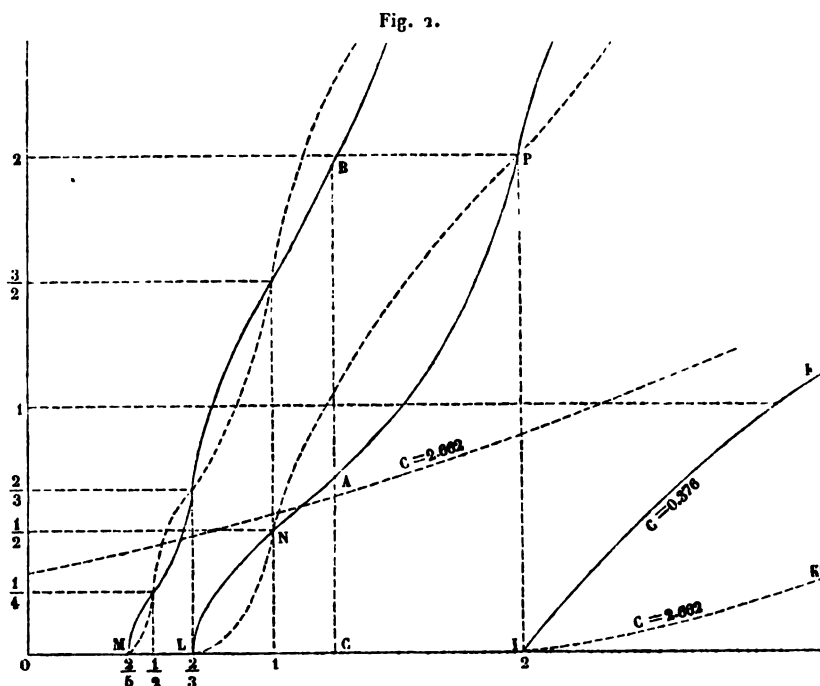
a étant égal à $\frac{\lambda}{l}$ et b à $\frac{l'}{l}$.

Nous avons dit aussi que l'on pouvait construire des courbes ayant a pour abscisse et b pour ordonnée. Le calcul de b est facile pour chaque valeur particulière donnée à a . On peut, à l'aide de ces courbes, déterminer facilement le son théorique que doit rendre un tuyau de dimensions données. Dans ce cas, on connaît $\frac{l'}{l}$ ou b , et les courbes font connaître les diverses valeurs correspondantes de a ou $\frac{\lambda}{l}$, d'où $\lambda = al$. On verrait facilement que ces valeurs de a sont en nombre indéfini, qu'ainsi la série des harmoniques rendus par un même tuyau est illimitée. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de construire ces courbes avec leur étendue illimitée : on peut simplement prendre la portion qui s'étend de $b = 0$ à $b = 1$. Nous avons vu quel était l'effet de la substitution de l' à l dans les formules. Si le tuyau est fermé, le son ne change pas.

Par suite, si m est une valeur de $\frac{\lambda}{l}$ répondant à une valeur particulière $\frac{l'}{l}$, ce sera aussi la valeur de $\frac{\lambda}{l'}$ correspondant à $\frac{l}{l'}$. Or, si $\frac{l'}{l}$ est plus grand que 1, $\frac{l}{l'}$ est plus

petit, et m sera donnée par la portion de courbe que l'on conserve; mais alors $\lambda = ml'$ et non plus ml . On ferait la même remarque pour les tuyaux ouverts; seulement, en changeant l en l' , il faut changer aussi c en $\frac{1}{c}$. Ainsi, ce serait la courbe répondant à $\frac{1}{c}$ qui donnerait les valeurs de m lorsque $\frac{l'}{l}$ est plus grand que 1.

Si nous considérons les courbes des tuyaux fermés (fig. 2), on trouve que celles



qui représentent le son fondamental (IK, IK') coupent toutes l'axe des abscisses au point I, tel que $OI = 2$. Elles sont concaves vers cet axe pour $c < 1$, convexes pour $c > 1$. Pour $c = 1$, c'est une ligne droite inclinée à 45 degrés, ce que l'on sait déjà, puisque dans ce cas il n'y a qu'un seul tuyau. Toutes ces courbes tendent vers une asymptote inclinée à 45 degrés sur l'axe, en sorte que pour une certaine longueur du second tuyau, assez grande du reste, tout accroissement de cette longueur détermine une augmentation moitié moindre de la longueur d'onde, comme pour un tuyau simple.

La tangente à la courbe en I a pour équation $a = 2(1 + cb)$; lors donc que b est assez petit pour que la courbe puisse être confondue avec sa tangente, on aura

$$\lambda = 2(l + cl').$$

Ainsi l'effet du second tuyau serait le même que si on augmentait le volume du

premier d'une quantité équivalente au volume du second. Passons au premier harmonique. C'est le cas où dans le tuyau mixte il y a un ventre.

Toutes les courbes qui lui correspondent passent par le point L de l'axe $OL = \frac{2}{3}$, ce qui doit être, car pour b ou $l' = 0$, $\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{3}$. A ce moment, le ventre se trouve au tiers du premier tuyau à partir du fond. A mesure que l' s'accroît, le ventre se rapproche du fond qu'il atteint lorsque $l' = \frac{l}{2}$; à ce moment, $a = 1$ ou $\lambda = l$. Ainsi toutes les courbes passent par le point N, ayant 1 pour abscisse, $\frac{1}{2}$ pour ordonnée. Jusque-là, le tuyau sonne comme un tuyau fermé qui aurait pour longueurs $(l - \lambda)$ et l' ; cela revient à supprimer la partie du premier tuyau comprise entre les deux ventres et qui sonne à l'unisson du reste. Aussi cette portion LN de la courbe a la même allure que la courbe du son fondamental.

Lorsque l' dépasse $\frac{l}{2}$, le ventre passe dans le second tuyau, et en supprimant les portions de chaque tuyau comprises entre un nœud et un ventre, il reste un tuyau mixte terminé par un nœud dans le grand tuyau, par un ventre dans le petit, résonnant comme un tuyau fermé de longueurs $l - \frac{\lambda}{2}$, $l' - \frac{\lambda}{2}$, mais dans lequel le rapport des surfaces est $\frac{1}{c}$ au lieu de c . Aussi la courbe, qui pour $c < 1$ était d'abord concave vers l'axe, devient-elle convexe à partir de N, comme la courbe du son fondamental pour $c > 1$. Elle conserve cette allure jusqu'en P ou $l' = 2l$, et alors elle redevient concave. C'est que le nœud du premier tuyau s'est de plus en plus rapproché du fond: il l'atteint pour $l' = 2l$, alors $\lambda = 2l$, puis il pénètre dans le second, et le tuyau résonne comme un tuyau mixte de longueurs l et $l' - \lambda$, le rapport des surfaces se retrouvant tel qu'il est dans la réalité, plus petit que 1.

On étendra facilement ces remarques aux autres harmoniques.

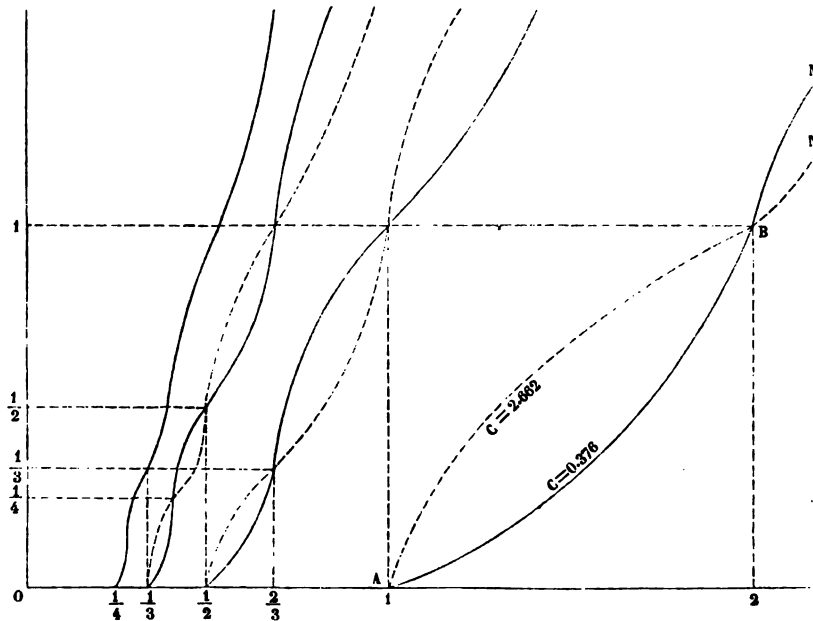
Prenons-nous les tuyaux ouverts, nous retrouverons des phénomènes analogues (*fig. 3*, p. 41).

Si le second tuyau est le plus étroit, $c < 1$, l'allure des courbes (AM) se rapproche du cas où, le tuyau étant fermé, c est plus grand que 1. Si le second tuyau est plus large, nous trouverons des analogies avec les tuyaux fermés pour lesquels c est plus petit que 1. Et cela doit être. Dans un tuyau ouvert, il y a, lors du son fondamental, deux ventres aux extrémités, un nœud intermédiaire. Ce nœud est-il dans le premier tuyau, ce qui arrive tant que l' est plus petit que l , on trouve dans la masse d'air vibrante deux parties: l'une simple, s'étendant de l'embouchure au nœud; l'autre mixte, allant du nœud à l'orifice libre, et vibrant à l'unisson de la

première. Cette dernière partie constitue un tuyau fermé ayant son fond au nœud, son embouchure à l'orifice libre; le rapport des surfaces est donc inverse de ce qu'il est dans le tuyau ouvert.

Lorsque l' devient égal à l , le nœud est au point de jonction des deux tuyaux et

Fig 3.



$\lambda = 2l$; le son du tuyau mixte est celui d'un tuyau simple ayant pour longueur totale celle du tuyau mixte. Toutes les courbes passent par le point B, pour lequel $a = 2, b = 1$.

Si l' est plus grand que l , le nœud passe dans le second tuyau, le tuyau résonne comme s'il était fermé au nœud en conservant à l'embouchure sa place réelle; dans ce cas c conserve sa valeur, que l'on considère le tuyau ouvert avec ses longueurs réelles, ou le tuyau fermé de longueurs l et $l' - \frac{1}{2}\lambda$. La courbe change d'allure, devient concave vers l'axe des abscisses si elle était convexe, et pourrait s'obtenir en augmentant chaque ordonnée de la courbe correspondante du tuyau fermé, de la moitié de l'abscisse qui répond à cette ordonnée.

On voit encore que si on note le son rendu par un tuyau ouvert, on obtiendra le même son d'un tuyau fermé, en conservant à la première portion du tuyau la même longueur, et en augmentant ou diminuant la longueur du second d'un nombre impair de $\frac{\lambda}{2}$.

Les deux formules théoriques (7) et (8) renferment ce résultat, puisque le produit

Ces tableaux se rapportent au son le plus grave des tuyaux mixtes, et ils permettent d'abaisser le son du tuyau ouvert d'une quarte, d'une quinte, etc.

Veut-on l'élever d'une quarte, d'une quinte, on lui fera rendre le premier harmonique en donnant à $\frac{l''}{l}$ les valeurs suivantes :

	λ	$c = 0,1$	$c = 0,3$	$c = 0,5$	$c = 0,7$	$c = 1,5$	2
Do . . .	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0
Si . . .	$\frac{8}{15}$	0,005	0,013	0,026	0,035	0,073	0,086
La . . .	$\frac{3}{5}$	0,026	0,092	0,136	0,168	0,229	0,236
Sol . . .	$\frac{2}{3}$	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333
Fa . . .	$\frac{3}{4}$	0,708	0,636	0,580	0,539	0,463	0,442
Mi . . .	$\frac{4}{5}$	0,774	0,725	0,666	0,664	0,550	0,518
Ré . . .	$\frac{8}{9}$	0,883	0,874	0,859	0,848	0,803	0,777
Do . . .	1	ton du tuyau ouvert.					

On voit que pour élever d'une quinte le ton primitif du tuyau ouvert, il suffit de donner au second tuyau le tiers de la longueur du premier, et cela quel que soit le rapport des surfaces des deux tuyaux.

Si l'on voulait avoir les rapports $\frac{l''}{l}$ pour les valeurs de c autres que celles qui se trouvent dans les tableaux précédents, on y parviendrait simplement en construisant les courbes qui ont c pour abscisse et pour ordonnées les nombres que j'ai calculés pour $\frac{l''}{l}$.

Lorsque c dépasse 0,6, ces courbes sont sensiblement rectilignes, et on peut, sans grande erreur, admettre la proportionnalité des différences des rapports aux différences de c .

Les tuyaux à cheminée fermés ne sont pas employés. J'y ai donné moins d'attention.

Voici quelques nombres qui leur conviendraient, si on prend pour tonique le son du premier tuyau fermé et si on fait rendre le son fondamental :

	$c = 0,3$	0,5	0,7
Sol . . .	$\frac{l''}{l} = 0,657$	0,46	0,35
Fa . . .	0,800	0,55	0,45
Mi . . .	1,04	0,82	0,66

Si on veut élever le son au lieu de l'abaisser, on a recours au premier harmonique, et on a :

	$c = 0,3$	$0,5$	$0,7$
	$\frac{l'}{l} = 0,791$		
<i>Sol</i> . . .		0,99	0,93
<i>Fa</i>	0,978	1,09	1,17
<i>Mi</i>	1,110	1,25	1,33
<i>Ré</i>	1,440	1,53	1,62

Il est inutile de faire le calcul pour c plus grand que 1 : les valeurs de l' sont alors très-petites, et on ne peut compter sur aucun accord entre le calcul et l'expérience.

Je me suis occupé de vérifier ces nombres par expérience.

J'ai pris un tuyau de zinc de 500 millimètres de longueur et de 51^{mm}, 5 de diamètre à embouchure circulaire. Le son qu'il rendait correspondait à une longueur d'onde de 547 millimètres. Je l'ai fait suivre de tubes ouverts en gutta-percha, en carton, que je coupais jusqu'à ce qu'ils rendissent les sons des gammes descendante et ascendante dont le son précité était la tonique.

Les longueurs l' ainsi obtenues s'éloignent des nombres calculés à l'aide des rapports précédents, si l'on prend $l = 500$. On devait s'y attendre. Mais si on remarque que, dans toutes mes expériences, le désaccord qui existe entre la théorie et l'expérience semble surtout attribuable à l'embouchure, il paraîtra naturel de faire porter l'erreur sur la longueur du premier tuyau et de la corriger en prenant pour cette longueur celle qu'elle devrait avoir d'après la théorie des tuyaux ordinaires, en un mot, la longueur d'ondulation 547 millimètres, qui convient au son rendu par ce tuyau.

C'est ainsi que j'ai calculé les longueurs l' pour les comparer aux valeurs que donne l'expérience.

Voici le résultat de cette expérience :

SÉRIE XI.

		$c = 0,038$		$c = 0,217$		$c = 0,386$		$c = 0,681$		$c = 2,17$	
		l' calculé.	l' observé.	l' calculé.	l' observé.	l' calculé.	l' observé.	l' calculé.	l' observé.	l' calculé.	l' observé.
Gamme descendante.	<i>Si</i> . .	0,88	»	9	»	16	5	33	20	75	75
	<i>La</i> . .	5,5	»	36	25	44	35	91	90	187	180
	<i>Sol</i> . .	8,8	»	51	54	88	88	158	160	264	260
	<i>Fa</i> . .	18	12	78	78	150	150	249	244	341	340
	<i>Mi</i> . .	19	»	133	132	220	220	305	312	387	385
	<i>Ré</i> . .	55	55	249	249	344	344	416	424	459	»

Premier harmonique.

		$c = 0,217$		$c = 0,386$		$c = 0,681$		$c = 2,17$	
		l' calculé.	l' observé.	l' calculé.	l' observé.	l' calculé.	l' observé.	l' calculé.	l' observé.
Gamme ascendante.	<i>Si</i> ...	6	»	11	6	18	»	55	40
	<i>La</i> ...	46	46	54	54	90	80	136	130
	<i>Sol</i> ..	182	182	182	182	182	182	182	180
	<i>Fa</i> ...	352	352	333	333	318	315	239	229
	<i>Mi</i> ...	408	408	393	394	354	354	279	272
	<i>Ré</i> ...	479	480	473	»	464	464	421	»

Le calcul de l' conduit, comme on le voit, à des résultats très-exacts lorsqu'on le fait comme je l'ai indiqué plus haut, pourvu toutefois que l' ne soit pas très-petit. Dans ce dernier cas, il y a une différence notable entre les nombres calculés et ceux que fournit l'observation. Nous avons déjà signalé cette différence dans d'autres expériences. Il est à remarquer que lorsque c est plus petit que $\frac{1}{3}$, une simple plaque percée d'un trou convenable abaisse de plus d'un demi-ton le son primitif du tuyau qu'elle ferme. On ne peut donc, dans ces cas, obtenir le *si*. De même les tons *la-sol* ne peuvent être obtenus lorsque $c = 0,038$.

Les expériences précédentes ont été faites avec des embouchures circulaires. J'ai essayé quelques tuyaux à embouchure rectiligne et je suis arrivé aux mêmes conclusions.

Je ne citerai qu'un exemple.

Un tuyau en bois rectangulaire a pour côtés 30 et 37 millimètres, sa longueur est de 234 millimètres. Le son qu'il rend correspond à une longueur d'ondulation de 330 millimètres. Il était surmonté d'un tuyau en gutta-percha ayant pour section 0,1 de la section du tuyau.

	l' calculé.	l' observé.
<i>Si</i>	2	»
<i>La</i>	7	2
<i>Sol</i>	14	8
<i>Fa</i>	27	23
<i>Mi</i>	40	40
<i>Ré</i>	80	84

D'après ce qui précède, veut-on construire un tuyau à cheminée qui donne le la^3 normal de 870 vibrations, le problème est indéterminé. Voici une des solutions.

Prenons un tuyau ouvert qui sonne le *fa*⁴ ou 1413,75 vibrations, la longueur d'onde sera 240^{mm}, 5; la longueur réelle du tuyau, s'il est cylindrique, sera, d'après la règle de M. Cavaillé-Coll, $240,5 - \frac{5}{3}D$. L'embouchure est rectiligne, D est le diamètre. On choisira le diamètre d du second tuyau. S'il est tel que $\left(\frac{d}{D}\right)^2 = c = 0,3$.

la longueur du second tuyau sera

$$0,319 \times 240,5 = 76,9.$$

Si $\left(\frac{d}{D}\right)^2 = 0,5$, elle deviendra

$$0,472 \times 240,5 = 113^{\text{mm}}.$$

Veut-on, ce qui me semble préférable, que le la^3 soit obtenu par le premier harmonique du tuyau mixte, on prendra un tuyau ouvert rendant le re^3 , longueur d'onde 564,8 : la longueur réelle est $564,8 - \frac{5}{3}D$; en ajoutant un second tuyau de longueur $\frac{564,8}{3} = 188$, on obtiendra le la^3 , quel que soit le diamètre du second tuyau.

Comme on l'a vu déjà, le ventre de vibration se trouve dans le premier tuyau à une distance de l'embouchure égale à $390,8 - \frac{5}{3}D$ (390,8 est la longueur d'onde du la^3); en perceant en ce point un trou on déterminera sûrement la production de l'harmonique. C'est la réalisation pour les tuyaux mixtes du procédé si utilement employé par M. Cavaillé-Coll pour la construction des tuyaux ordinaires.

Ce qui me fait préférer les sons harmoniques aux sons fondamentaux, c'est qu'ils sont plus purs, plus intenses. Ils sont moins fortement altérés lorsqu'on fait varier la longueur du second tuyau en deçà ou au delà de la valeur calculée; dès lors l'accord est plus facile à obtenir. On pourrait établir le calcul sur d'autres bases, admettre que le son la^3 sera à la tierce, à la quarte du son du tuyau ouvert; la longueur du second tuyau dépend alors du diamètre de ce tuyau : les tableaux précédents conduiraient facilement à la valeur convenable.

Une fois construit le tuyau qui rend le la^3 , on obtiendra presque sans calcul les longueurs qui conviendraient à tous les sons de la gamme. D'après une des lois énoncées plus haut, les longueurs des tuyaux sont en raison inverse des nombres de vibrations, lorsqu'on conserve le même rapport entre les longueurs l et l' . Il faut seulement remarquer que l est la longueur corrigée $\frac{v}{n}\lambda - \frac{5}{3}D$, et que l' ne doit pas être très-petit.

Dans les orgues, on emploie des tuyaux à cheminée qu'on désigne sous le nom de *bourdons*, comme s'ils étaient complètement fermés. Je trouve dans *l'Art du Facteur d'orgues*, de D. Bedos de Celles, les détails suivants sur leur construction. Ce traité est déjà ancien. Je ne sais si les facteurs d'orgues suivent encore ces prescriptions.

• Les tuyaux à cheminée ont les mêmes proportions que les tuyaux fermés. La cheminée est d'autant plus haute qu'on la fait plus grosse, et plus elle est menue, plus elle doit être courte. Les plus grosses ont la moitié du diamètre du tuyau; en

ce cas, elles doivent être presque aussi hautes que le corps du tuyau. Il y a des facteurs qui leur donnent le quart ou le huitième du diamètre du tuyau; elles sont plus courtes à proportion. Plus la cheminée est grosse et haute, plus le timbre approche de celui des tuyaux ouverts; plus elle est courte et étroite, plus le timbre se rapproche de celui des tuyaux bouchés. Ainsi, dans le choix des tuyaux ouverts ou bouchés, on a égard à l'effet que l'on veut produire.

On trouve des tuyaux à cheminée dans le jeu de bourdon de 4 pieds bouchés, dans le jeu de nasard, du positif et dans le jeu du cornet. Dans ce dernier, les cheminées ont la moitié de la hauteur du tuyau et le quart du diamètre.

En prenant la cheminée de même hauteur que le corps du tuyau, on a, nous l'avons vu, la série des sons que rendrait un tuyau simple ouvert dont la longueur serait égale à la longueur totale du tuyau mixte, et le rapport des surfaces est sans influence.

Si la cheminée a pour hauteur la moitié du corps du tuyau, on a les sons rendus par la moitié du premier tuyau résonnant seul, et cela indépendamment du diamètre des surfaces.

En adoptant ces proportions, les facteurs d'orgues avaient choisi les cas les moins compliqués, ceux dans lesquels le rapport des surfaces a le moins d'influence. Elles font rentrer la construction des tuyaux à cheminée dans les règles de facture des tuyaux ordinaires. Le choix spécial des diamètres qui sont pour les cheminées la moitié ou le quart du diamètre principal semble déterminé par les qualités de sonorité ou de timbre que l'on exige de pareils tuyaux, comme il est dit plus haut. Du reste, les longueurs des tuyaux qui composent un jeu sont inverses des nombres de vibrations, loi que nous avons déduite de nos expériences. (Elle est ici applicable, puisqu'il existe de fait un rapport constant entre les longueurs de la cheminée et du premier tuyau).

Les tuyaux à cheminée s'accordent à l'aide d'oreilles que l'on met à la bouche du tuyau. On rend parfois mobile la calotte qui ferme le tuyau et qui porte la cheminée, et on peut, par des mouvements convenables, faire varier dans un sens ou dans l'autre la longueur du corps et arriver ainsi à l'accord.

Enfin, nous dirons en finissant que l'on n'emploie jamais dans les orgues des tuyaux à cheminée bouchée ou des tuyaux dans lesquels la cheminée se trouve d'un plus grand diamètre que le corps principal du tuyau.

En résumant tout ce qui précède, on voit que :

- 1° Les tuyaux à cheminée peuvent rendre chacun un nombre de sons illimité.
- 2° Deux tuyaux fermés dont les parties ont des longueurs inverses les unes des autres rendent le même son.
- 3° Dans un tuyau ouvert, le son ne change pas, quelle que soit la portion qui reçoit l'embouchure.

4° Lorsqu'il existe un rapport constant entre les longueurs des deux parties d'un tuyau, les sons obtenus sont en raison inverse des longueurs d'une de ces parties.

5° Lorsque, dans un tuyau ouvert, les deux parties ont mêmes longueurs, on obtient la série des sons que rendrait un tuyau simple ouvert de même longueur que le tuyau mixte.

6° Si l'on donne au second tuyau une longueur double ou moitié du premier, on a toute la série des sons que rendrait le premier ou sa moitié vibrant seuls, et en outre d'autres sons qui dépendent du rapport des surfaces des tuyaux.

7° La colonne d'air qui remplit un tuyau mixte peut se diviser en plusieurs parties vibrant à l'unisson et séparées par des nœuds ou des ventres. Ces points ne sont pas dans le premier tuyau aux places que la théorie leur assigne, ils sont plus éloignés de l'embouchure qu'ils ne devraient l'être. Si on compte leur distance à l'embouchure pour le premier tuyau, et à l'orifice du second, on trouve qu'ils sont placés comme dans des tuyaux simples vibrant à l'unisson du mixte. La distance de deux ventres est d'une longueur d'ondulation, et la distance du premier ventre à l'embouchure est la même, que le tuyau soit simple ou mixte.

8° Un même son peut être rendu par une infinité de tuyaux. Les longueurs des différentes parties de ces tuyaux diffèrent d'un certain nombre de longueurs d'ondulation.

9° Tous les résultats qui précèdent se vérifient d'une manière générale; les sons obtenus sont plus graves que les sons théoriques. Les différences sont assez considérables si les deux tuyaux, ou le premier au moins, ont de petites longueurs.

Si les deux tuyaux n'ont pas des diamètres trop différents, l'influence du diamètre même des tuyaux ne semble pas différente de ce qu'elle est dans les tuyaux simples. L'approximation avec laquelle on obtient les sons théoriques est pour les tuyaux mixtes de même ordre que pour les tuyaux simples. Il suffit, pour faire cesser le désaccord, d'augmenter la longueur du corps du tuyau d'une longueur qui représente l'effet de l'embouchure, longueur que l'on peut déterminer par expérience sur des tuyaux simples ou que l'on peut calculer par une formule analogue à celle qu'a donnée M. Cavaillé-Coll.

10° Les sons obtenus avec des embouchures circulaires se rapprochent plus des sons théoriques que ceux des tuyaux à embouchure rectiligne, surtout si l'on emploie des embouchures larges.

11° Il est possible de calculer d'avance le ton d'un tuyau en se servant des courbes qui représentent les formules théoriques. On peut aussi trouver, par un calcul simple, les dimensions d'un tuyau à cheminée rendant un son d'une hauteur déterminée.

SUR DEUX INTÉGRALES DOUBLES,

PAR M. HERMITE,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES À L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Une question relative à un certain mode de développement en série des fonctions de plusieurs variables repose sur la détermination de l'intégrale multiple.

$$A = \int \int \dots \int \frac{dx dy \dots du}{PP'},$$

où les quantités P et P' ont pour expression

$$P = 1 - 2ax - 2by - \dots - 2lu + a^2 + b^2 + \dots + l^2,$$
$$P' = 1 - 2a'x - 2b'y - \dots - 2l'u + a'^2 + b'^2 + \dots + l'^2,$$

et l'intégration devant être étendue à toutes les valeurs des variables $x, y, \dots, u$, qui satisfont à la condition

$$x^2 + y^2 + \dots + u^2 \leq 1.$$

En posant

$$Q = (1 - ax - by - \dots - lu)^2 - (a^2 + b^2 + \dots + l^2)(x^2 + y^2 + \dots + u^2 - 1),$$

la même question exige aussi la détermination de l'intégrale

$$B = \int \int \dots \int \frac{dx dy \dots du}{P' \sqrt{Q}}$$

entre les mêmes limites que la précédente. Me bornant au cas de deux variables seulement, et en employant les méthodes élémentaires, je vais développer le calcul par lequel on obtient leurs valeurs.

Soit, pour abréger,

$$r^2 = a^2 + b^2,$$
$$r'^2 = a'^2 + b'^2;$$

j'introduirai comme auxiliaire un angle θ défini par les égalités

$$\frac{aa' + bb'}{rr'} = \cos \theta, \quad \frac{ba' - ab'}{rr'} = \sin \theta,$$

et je ferai un premier changement de variable, savoir :

$$x = \frac{a\xi + b\eta}{r}, \quad y = \frac{b\xi - a\eta}{r},$$

par lequel l'intégrale A prendra cette forme plus simple

$$A = \iint \frac{d\xi d\eta}{(1 - 2r\xi + r^2)[1 - 2r'(\xi \cos \theta + \eta \sin \theta) + r'^2]}.$$

Les limites d'ailleurs seront déterminées comme précédemment par la condition

$$\xi^2 + \eta^2 \leq 1,$$

de sorte que l'intégration par rapport à η devra s'effectuer depuis $\eta = -\sqrt{1 - \xi^2}$ jusqu'à $\eta = +\sqrt{1 - \xi^2}$. On trouve ainsi pour résultat

$$\frac{1}{1 - 2r\xi + r^2} \cdot \frac{1}{2r' \sin \theta} \log \frac{1 - 2r'(\xi \cos \theta - \sqrt{1 - \xi^2} \sin \theta) + r'^2}{1 - 2r'(\xi \cos \theta + \sqrt{1 - \xi^2} \sin \theta) + r'^2},$$

et c'est cette expression qu'il reste à intégrer de $\xi = -1$ à $\xi = +1$.

En posant

$$\xi = \cos \varphi,$$

on obtiendra pour A la valeur suivante

$$A = \frac{1}{2r' \sin \theta} \int_0^\pi d\varphi \frac{\sin \varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} \log \frac{1 - 2r' \cos(\varphi + \theta) + r'^2}{1 - 2r' \cos(\varphi - \theta) + r'^2},$$

ou plutôt, en multipliant et divisant par r ,

$$A = \frac{1}{2(ba' - ab')} \int_0^\pi d\varphi \frac{r \sin \varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} \log \frac{1 - 2r' \cos(\varphi + \theta) + r'^2}{1 - 2r' \cos(\varphi - \theta) + r'^2}.$$

Cette intégrale définie se trouve aisément, comme on va voir.

Je supposerai expressément que r et r' sont tous deux moindres que l'unité, de

manière à pouvoir faire usage de ces développements :

$$\begin{aligned}\frac{r \sin \varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} &= r \sin \varphi + r^2 \sin 2\varphi + r^3 \sin 3\varphi + \dots \\ -\frac{1}{2} \log [1 - 2r' \cos(\varphi + \theta) + r'^2] &= r' \cos(\varphi + \theta) + \frac{r'^2}{2} \cos 2(\varphi + \theta) + \frac{r'^3}{3} \cos 3(\varphi + \theta) + \dots \\ -\frac{1}{2} \log [1 - 2r' \cos(\varphi - \theta) + r'^2] &= r' \cos(\varphi - \theta) + \frac{r'^2}{2} \cos 2(\varphi - \theta) + \frac{r'^3}{3} \cos 3(\varphi - \theta) + \dots\end{aligned}$$

On conclut des deux derniers

$$\frac{1}{4} \log \frac{1 - 2r' \cos(\varphi + \theta) + r'^2}{1 - 2r' \cos(\varphi - \theta) + r'^2} = r' \sin \varphi \sin \theta + \frac{r'^2}{2} \sin 2\varphi \sin 2\theta + \frac{r'^3}{3} \sin 3\varphi \sin 3\theta + \dots,$$

de sorte qu'on est amené à intégrer entre zéro et π le produit de deux séries

$$(r \sin \varphi + r^2 \sin 2\varphi + r^3 \sin 3\varphi + \dots) \left(r' \sin \varphi \sin \theta + \frac{r'^2}{2} \sin 2\varphi \sin 2\theta + \frac{r'^3}{3} \sin 3\varphi \sin 3\theta + \dots \right).$$

Or, en vertu des relations,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi d\varphi \sin m\varphi \sin n\varphi &= 0, \\ \int_0^\pi d\varphi \sin^2 m\varphi &= \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

on obtient ainsi, pour la valeur de A, ce développement

$$A = \frac{\pi}{ba' - ab'} \left(rr' \sin \theta + \frac{r^2 r'^2}{2} \sin 2\theta + \frac{r^3 r'^3}{3} \sin 3\theta + \dots \right),$$

et, d'après les formules connues, on en conclut immédiatement

$$A = \frac{\pi}{ba' - ab'} \cdot \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 - rr' e^{-\theta\sqrt{-1}}}{1 - rr' e^{\theta\sqrt{-1}}}.$$

Observant enfin qu'on peut écrire successivement

$$\begin{aligned}\log \frac{1 - rr' e^{-\theta\sqrt{-1}}}{1 - rr' e^{\theta\sqrt{-1}}} &= \log \frac{1 - rr' (\cos \theta - \sqrt{-1} \sin \theta)}{1 - rr' (\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta)}, \\ &= \log \frac{1 + \frac{rr' \sin \theta}{1 - rr' \cos \theta} \sqrt{-1}}{1 - \frac{rr' \sin \theta}{1 - rr' \cos \theta} \sqrt{-1}}, \\ &= \log \frac{1 + \frac{ba' - ab'}{1 - aa' - bb'} \sqrt{-1}}{1 - \frac{ba' - ab'}{1 - aa' - bb'} \sqrt{-1}},\end{aligned}$$

on arrive définitivement à ce résultat très-simple

$$A = \frac{\pi}{ba' - ab'} \arctan \frac{ba' - ab'}{1 - aa' - bb'}.$$

Je considère en second lieu l'intégrale B, savoir :

$$B = \iint \frac{dx dy}{(1 - 2a'x - 2b'y + a'^2 + b'^2) [(1 - 2ax - 2by)^2 - (a^2 + b^2)(x^2 + y^2 - 1)]^{\frac{1}{2}}};$$

elle devient d'abord, par la substitution linéaire,

$$x = \frac{a'\xi - b'\eta}{r'}, \quad y = \frac{b'\xi + a'\eta}{r'},$$

$$B = \iint \frac{d\xi d\eta}{(1 - 2r'\xi + r'^2) [(1 - r \cos \theta \xi - r \sin \theta \eta)^2 - (\xi^2 + \eta^2 - 1)r^2]^{\frac{1}{2}}},$$

ce qui conduit à intégrer, en premier lieu, par rapport à la variable η . Il convient, à cet effet, d'employer les logarithmes imaginaires, en se servant de la formule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log \left(\frac{Ax + B}{\sqrt{A}} + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C} \right);$$

et en remarquant que les valeurs limites de η donnent $\xi^2 + \eta^2 = 1$, la racine carrée placée sous le signe logarithmique pourra s'extraire et deviendra simplement

$$1 - r \cos \theta \xi - r \sin \theta \eta.$$

Quelques réductions faciles à voir donneront pour résultat de cette intégration, par rapport à η , entre les limites $\eta = -\sqrt{1 - \xi^2}$, $\eta = +\sqrt{1 - \xi^2}$, la quantité

$$\frac{1}{1 - 2r'\xi + r'^2} \cdot \frac{1}{r \cos \theta \sqrt{-1}} \log \frac{1 - r \cos \theta (\xi - \sqrt{-1} \sqrt{1 - \xi^2})}{1 - r \cos \theta (\xi + \sqrt{-1} \sqrt{1 - \xi^2})},$$

et il s'agit de l'intégrer par rapport à ξ entre les limites $\xi = -1$, $\xi = +1$.

Je ferai comme précédemment

$$\xi = \cos \varphi,$$

ce qui donnera, après avoir multiplié et divisé par r' , l'intégrale définie

$$B = \frac{1}{rr' \cos \theta} \int_0^\pi d\varphi \frac{r' \sin \varphi}{1 - 2r' \cos \varphi + r'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}} \log \frac{1 - r \cos \theta e^{-\varphi} \sqrt{-1}}{1 - r \cos \theta e^{\varphi} \sqrt{-1}},$$

et, en admettant toujours la supposition déjà faite de r et r' moindres que l'unité, je ferai usage des développements

$$\frac{r' \sin \varphi}{1 - 2r' \cos \varphi + r'^2} = r' \sin \varphi + r'^2 \sin 2\varphi + r'^3 \sin 3\varphi + \dots,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 - r \cos \theta e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1 - r \cos \theta e^{\varphi\sqrt{-1}}} = r \cos \theta \sin \varphi + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{2} \sin 2\varphi + \frac{r^3 \cos^3 \theta}{3} \sin 3\varphi + \dots$$

Maintenant, si l'on intègre entre les limites zéro et π le produit des seconds membres, on trouvera immédiatement

$$B = \frac{\pi}{rr' \cos \theta} \left[rr' \cos \theta + \frac{(rr' \cos \theta)^2}{2} + \frac{(rr' \cos \theta)^3}{3} + \dots \right],$$

c'est-à-dire

$$B = \frac{\pi}{rr' \cos \theta} \log \frac{1}{1 - rr' \cos \theta} = \frac{\pi}{aa' + bb'} \log \left(\frac{1}{1 - aa' - bb'} \right).$$

C'est le résultat que je me proposais d'établir; je me borne en ce moment à remarquer que les constantes a, b, a', b' n'y entrent que par les produits aa' et bb' , de sorte que l'intégrale ne change pas en y remplaçant a et a' par $\frac{a}{t}$, $a't$, et b et b' par $\frac{b}{u}$, $b'u$. Relativement à A , il est possible seulement de changer a et b , d'une part, en at, bt ; a' et b' , de l'autre, en $\frac{a'}{t}, \frac{b'}{t}$; ce sont ces propriétés qui servent de point de départ à l'extension aux fonctions de plusieurs variables de la théorie des fonctions X_n de Legendre.

RECHERCHES
SUR
LES SURFACES ORTHOGONALES,

PAR M. G. DARBOUX,
AGRÉGÉ PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Ces recherches comprennent deux parties distinctes.

Dans la première, je donne quelques propriétés nouvelles des surfaces formant un système triple orthogonal. Ces propriétés correspondent aux propriétés focales des courbes orthogonales, propriétés qui ont été trouvées par M. Kummer (voir *Journal de Crelle*, t. XXXV). Cet éminent géomètre montre que des courbes orthogonales sont toujours homofocales; je fais voir de même que des surfaces orthogonales sont *homofocales*. Il est nécessaire d'adopter pour cela une définition des focales et des foyers d'une surface qui est l'extension naturelle de la définition des foyers dans les courbes.

Dans la deuxième partie j'indique un système de surfaces orthogonales que je crois nouveau et intéressant. Il se compose de surfaces du quatrième degré qui admettent pour ligne double le cercle imaginaire à l'infini. Ces surfaces jouissent de belles propriétés : elles admettent en particulier dix séries de sections circulaires. On ne connaissait pas jusqu'à présent de surface qui admit plus de huit séries de sections circulaires.

Je signalerai encore, pour faire un résumé complet de ce qui se trouve dans mon travail, cette remarque qu'on peut toujours trouver sur une surface l'équation finie d'une ligne de courbure. C'est par là que je commencerai.

I.

1. Considérons une surface quelconque. Rapportons-la à trois axes rectangulaires, et posons suivant l'usage

$$dz = p dx + q dy.$$

L'équation des lignes de courbure sera

$$\frac{dx + p dz}{dp} = \frac{dy + q dz}{dq} = \frac{dz(1 + p^2 + q^2)}{p dp + q dq}.$$

On satisfait à cette équation en posant

$$(1) \quad 1 + p^2 + q^2 = 0,$$

car il vient alors

$$p dp + q dq = 0.$$

D'ailleurs l'équation (1) détermine sur la surface une courbe qui sera ligne de courbure. En d'autres termes, l'équation (1) détermine une *intégrale particulière* et non la *solution particulière*. Si l'on cherche la *solution particulière*, on verra en effet qu'elle est donnée par une équation distincte de l'équation (1) (*).

L'équation (1) détermine les plans pour lesquels le plan tangent est parallèle à l'un des plans tangents du cône

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Ce cône est appelé quelquefois cône asymptote de la sphère. Ainsi on a la propriété suivante :

Menez à une surface tous les plans tangents parallèles à ceux du cône asymptote de la sphère, le lieu des points de contact sera une ligne de courbure de la surface.

On peut se rendre compte *à priori* de ce résultat si singulier. Étudions en effet les développables comprises dans l'équation

$$1 + p^2 + q^2 = 0.$$

La normale à l'une de ces surfaces en un point quelconque, c'est la génératrice même de la surface, comme il est facile de le vérifier par un calcul bien simple. Ainsi ces surfaces développables ont pour normales leurs propres génératrices. Il résulte de là que toute courbe tracée sur ces surfaces sera ligne de courbure. En effet, les normales à la surface, le long de cette ligne, forment la surface développable elle-même; elles sont tangentes à l'arête de rebroussement. Toute ligne tracée sur la surface satisfait donc à la définition des lignes de courbure.

Le lieu des centres de courbure est l'arête de rebroussement, mais le rayon de courbure est toujours nul, car pour deux points (XYZ), (xyz) pris sur une

(*) On obtient la solution particulière en écrivant que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ fournies par l'équation des lignes de courbure sont égales; on a la relation

$$[t(1 + p^2) - r(1 + q^2)]^2 + 4[pqr - s(1 + p^2)][pqt - s(1 + q^2)] = 0.$$

Cette équation représente une ligne imaginaire pour tous les points de laquelle les deux rayons de courbure sont égaux : c'est l'enveloppe des lignes de courbure. On peut l'appeler *ligne ombilicale*; elle a pour points doubles tous les ombilics de la surface.

même génératrice, on a toujours

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 = 0 \quad (*).$$

Prenons maintenant une surface quelconque; on peut toujours lui circonscrire une développable comprise dans l'équation (1), et alors la ligne de contact sera, comme nous l'avons vu, une ligne de courbure commune aux deux surfaces.

Il résulte de ce qui précède que si l'équation différentielle des lignes de courbure est de celles qu'on peut intégrer quand on connaît une intégrale particulière, l'intégrale générale pourra être obtenue.

2. Considérons maintenant un système triple de surfaces orthogonales. Voici ce que nous entendons par système triple :

Toute équation

$$f(x, y, z, \lambda) = 0$$

détermine une série de surfaces comprises dans une même équation. Il suffit de faire varier λ . Les surfaces comprises dans une telle équation ont quelques propriétés bien connues et qu'il suffit de rappeler.

Le degré de l'équation en λ détermine le nombre de ces surfaces qui passent par un point de l'espace. Les surfaces ont une enveloppe, et cette enveloppe admet une arête de rebroussement pour tous les points de laquelle trois surfaces sont tangentes. Enfin, sur cette arête il y a un point de rebroussement pour lequel quatre surfaces deviennent tangentes.

Dans le cas où l'équation est du troisième degré en λ , on a un *système triple*. Si deux surfaces quelconques se coupent à angle droit, on a un système triple orthogonal. Le système formé de surfaces du second degré rentre dans cette définition.

En un point quelconque de l'espace, il passe trois surfaces qui se coupent à angle droit. Les surfaces orthogonales ne peuvent donc pas avoir d'enveloppe réelle. Mais il y a une enveloppe imaginaire que nous allons étudier.

Soient XYZ , $X'Y'Z'$, $X''Y''Z''$ les coefficients angulaires des normales aux trois surfaces. On a les relations

$$(2) \quad \begin{cases} XX' + YY' + ZZ' = 0 \\ XX'' + YY'' + ZZ'' = 0 \\ X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' = 0. \end{cases}$$

Mais pour tout point de l'enveloppe les plans tangents à deux des surfaces

(*) Ces surfaces ont encore une propriété à peu près évidente. Si on les coupe par des plans parallèles, les projections des courbes de section sur un des plans sécants sont des courbes parallèles, quelle que soit la direction des plans sécants.

coïncident avec le plan tangent de l'enveloppe. On a par conséquent

$$X = X', \quad Y = Y', \quad Z = Z'.$$

La première des relations (2) doit toujours être satisfaite. On a donc

$$(3) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

ce qui prouve que l'enveloppe est une surface développable satisfaisant à l'équation (1)

$$1 + p^2 + q^2 = 0.$$

De là ce théorème :

Quand on a un système de surfaces orthogonales, ce système a pour enveloppe une surface développable dont les génératrices sont parallèles à celles du cône asymptote de la sphère.

3. Ce théorème se vérifie en particulier pour les surfaces du second degré.

Ces surfaces sont comprises dans l'équation

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = 0.$$

L'équation du plan tangent peut se mettre sous la forme

$$mx + ny + pz = \sqrt{am^2 + bn^2 + cp^2 - \lambda(m^2 + n^2 + p^2)}.$$

Si l'on fait

$$m^2 + n^2 + p^2 = 0,$$

λ disparaît, et l'on a un plan tangent à toutes les surfaces.

4. On peut donner une forme élégante au théorème qui précède, en définissant de la manière suivante les foyers et les focales d'une surface.

Dans le plan, pour avoir les foyers d'une courbe, on lui mène les tangentes ayant pour coefficients angulaires

$$\pm \sqrt{-1},$$

c'est-à-dire les tangentes parallèles aux asymptotes du cercle. Les points de rencontre de ces tangentes sont les foyers de la courbe.

De même, dans l'espace, on mènera les plans tangents parallèles à ceux du cône asymptote de la sphère. On formera ainsi une surface développable circonscrite à la proposée; sur chacune des génératrices de cette surface, il y aura un point réel. Le lieu de ces points se composera d'une ou de plusieurs courbes. Ces courbes seront appelées *focales* de la surface. Ce sont elles qui répondent aux foyers des courbes planes. Ce sont des lignes doubles de la surface développable. En effet, par chacun de leurs points réels il passe deux génératrices imaginaires conjuguées.

On peut appeler foyer de la surface tout point des focales, et alors un foyer pourra être défini un point-sphère ayant un double contact avec la surface (*).

5. Avec ces définitions, le théorème que nous avons reconnu pourra s'énoncer ainsi :

Toutes les surfaces faisant partie d'un système orthogonal sont homofocales, c'est-à-dire ont les mêmes focales.

Sous cette forme, le théorème devient la généralisation de celui qui est dû à M. Kummer sur les courbes orthogonales.

6. Mais les systèmes orthogonaux donnent lieu à d'autres propriétés qui n'ont pas d'analogue dans le plan. Ainsi, toute surface faisant partie d'un système orthogonal contient nécessairement une ou plusieurs droites parallèles aux génératrices du cône asymptote de la sphère.

En effet, en tout point de l'enveloppe, il y a deux surfaces tangentes à l'enveloppe et une troisième surface qui la coupe. Toute surface du système touche donc l'enveloppe suivant une courbe et la coupe suivant une autre. Il y a une courbe de contact et une courbe d'intersection. Je dis que cette courbe d'intersection se compose de droites. En effet, la tangente en un quelconque de ses points est l'intersection des plans tangents à la surface et à l'enveloppe. Or, le plan tangent à la surface est perpendiculaire au plan tangent de l'enveloppe, et par suite il contient la normale à l'enveloppe qui est la génératrice de cette surface développable. Cette génératrice est donc l'intersection des deux plans tangents ; c'est la tangente à la courbe d'intersection des deux surfaces. Or, il n'y a sur une surface développable que l'arête de rebroussement qui soit tangente à toutes les génératrices. Comme cette solution ne peut convenir, il faut que la courbe d'intersection des deux surfaces se réduise à une ou plusieurs droites.

Ainsi, toute surface du système contient des droites, et le lieu de ces droites forme l'enveloppe du système. Ces droites rencontrent la courbe de contact de la surface avec l'enveloppe sur l'arête de rebroussement.

7. On voit bien d'après cela pourquoi une surface quelconque ne peut faire partie d'un système triple orthogonal. Ainsi il n'y aura pas de système triple

(*) Les définitions précédentes ne sont sans doute pas nouvelles ; cependant, comme je ne les ai vues nulle part, j'ai cru devoir les donner avec quelque développement. La définition des focales d'une courbe est analogue à celle des focales d'une surface. On fait passer par chaque tangente de la courbe un plan parallèle à un plan tangent du cône asymptote de la sphère. On a une développable qui admet pour ligne double la courbe proposée. Il y a d'autres lignes doubles qui sont les focales de la proposée. On voit qu'il y a réciprocité entre les courbes focales : si une courbe A est la focale d'une courbe B, réciproquement la courbe B est focale de la courbe A. De plus, si une courbe C est focale de deux courbes A et B, les deux courbes A et B sont focales l'une de l'autre.

Les focales d'une même surface forment un système de courbes dont une quelconque a pour focales toutes les autres.

orthogonal formé de surfaces des ondes, car on ne peut placer aucune droite sur ces surfaces. Les considérations précédentes justifient donc la remarque qu'a faite M. Serret (*Journal de Liouville*, t. XII, p. 242, *Mémoire sur les surfaces orthogonales*), que le nombre des surfaces susceptibles de faire partie d'un système orthogonal pourrait bien être assez limité.

8. Les cônes de même sommet circonscrits aux surfaces orthogonales sont homofocaux. En effet, si par le sommet commun on mène des plans tangents à l'enveloppe développable, ces plans tangents seront évidemment communs à tous les cônes circonscrits. Or, ce sont les plans dont les intersections déterminent les focales. Par suite, les cônes seront homofocaux.

Quand des cônes sont orthogonaux, ils sont aussi homofocaux. Ainsi, une première condition pour que des cônes soient orthogonaux, c'est qu'ils aient les mêmes focales. On est donc en droit de supposer qu'il y aura toute une classe de surfaces orthogonales pour lesquelles les cônes circonscrits seront non-seulement homofocaux, mais aussi orthogonaux. Dans ce cas, deux surfaces orthogonales quelconques pourront être considérées comme lieu des centres de courbure d'une troisième surface, et on pourra trouver l'intégrale première de l'équation des lignes géodésiques. Je ne développe pas les conséquences relatives à ce cas; il n'y aurait qu'à répéter ce qui a déjà été dit à propos des surfaces du second degré.

9. On peut faire aux théorèmes précédents une objection qu'il ne sera peut-être pas inutile d'éclaircir. La voici :

Quand on transforme les surfaces par rayons vecteurs réciproques, la surface développable qui les enveloppe n'est pas transformée en surface développable; les droites se transforment en cercles, et cependant les surfaces restent orthogonales. Les théorèmes précédents sont donc en défaut.

Mais l'objection peut être levée facilement, car les surfaces développables comprises dans l'équation

$$1 + p^2 + q^2 = 0$$

se transforment en surfaces développables.

En effet, le cône

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0$$

se transformant en un cône

$$(x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2 = 0,$$

il faut que les génératrices du premier cône deviennent les génératrices du second. Donc toutes les droites parallèles aux génératrices du cône asymptote de la sphère se transforment en droites, et les surfaces gauches ou développables formées de ces droites se transforment en surfaces réglées.

On peut même ajouter cette conséquence, que si l'on transforme une surface par rayons vecteurs réciproques, les focales de la surface transformée sont les transformées des focales de la surface primitive.

II.

10. Je vais donner maintenant un nouveau système de surfaces orthogonales.

Il y a une classe de courbes du quatrième degré, dont l'équation est de la forme

$$(x^2 + y^2)^2 + u_1(x^2 + y^2) + u_2 = 0,$$

u_1 et u_2 étant des polynômes du premier et du second degré en x, y . Ces courbes remarquables ont été étudiées (voir CHASLES, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXXVII, et SALMON, *Courbes planes*, p. 123). Aux nombreuses propriétés qu'on leur a trouvées, on peut ajouter celle-ci : elles sont susceptibles de former un système orthogonal (voir la Note I à la fin du Mémoire, page 65).

Les surfaces qui correspondent aux courbes précédentes ont une équation de la forme

$$(\alpha) \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 + u_1(x^2 + y^2 + z^2) + u_2 = 0,$$

u_1 et u_2 étant comme précédemment des polynômes du premier et du second degré. Nous sommes conduits à chercher si ces surfaces peuvent former un système triplement orthogonal.

Prenons les surfaces les plus simples, celles dont l'équation est de la forme

$$(\beta) \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 + \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - h^4 = 0.$$

Soient les équations de deux de ces surfaces :

$$\begin{aligned} F &= \rho^4 + \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - h^4 = 0, \\ F' &= \rho^4 + \alpha'^2 x^2 + \beta'^2 y^2 + \gamma'^2 z^2 - h'^4 = 0, \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Écrivons que ces deux surfaces se coupent à angle droit. Nous devons avoir

$$\frac{dF}{dx} \cdot \frac{dF'}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dF'}{dy} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dF'}{dz} = 0,$$

ce qui donne, en tenant compte des équations des deux surfaces,

$$(\alpha^2 \alpha'^2 + 2h^4 + 2h'^4)x^2 + (\beta^2 \beta'^2 + 2h^4 + 2h'^4)y^2 + (\gamma^2 \gamma'^2 + 2h^4 + 2h'^4)z^2 = 0.$$

Mais en retranchant les équations des deux surfaces on a

$$(\alpha'^2 - \alpha^2)x^2 + (\beta'^2 - \beta^2)y^2 + (\gamma'^2 - \gamma^2)z^2 + h' - h = 0.$$

Cette équation et la précédente doivent coïncider. On a donc

$$h' = h$$

$$\frac{\alpha^2 - \alpha'^2}{\alpha^2 \alpha'^2 + 4h} = \frac{\beta^2 - \beta'^2}{\beta^2 \beta'^2 + 4h} = \frac{\gamma^2 - \gamma'^2}{\gamma^2 \gamma'^2 + 4h} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

En introduisant le paramètre λ , on peut exprimer α' , β' , γ' en fonction de α , β , γ , et l'on trouve que les surfaces coupant orthogonalement la surface F ont pour équation

$$(4) \quad \rho^2 + \frac{\alpha^2 \lambda^2 - 4h}{\alpha^2 + \lambda^2} x^2 + \frac{\beta^2 \lambda^2 - 4h}{\beta^2 + \lambda^2} y^2 + \frac{\gamma^2 \lambda^2 - 4h}{\gamma^2 + \lambda^2} z^2 - h = 0.$$

L'équation précédente détermine un système triple de surfaces. Elle est en effet du troisième degré en λ . Je dis que ce système triple est orthogonal. Soient en effet les équations de deux surfaces comprises dans l'équation (4) :

$$\rho^2 + \alpha'^2 x^2 + \beta'^2 y^2 + \gamma'^2 z^2 - h = 0,$$

$$\rho^2 + \alpha''^2 x^2 + \beta''^2 y^2 + \gamma''^2 z^2 - h = 0.$$

On a par conséquent

$$\alpha'^2 = \frac{\alpha^2 \lambda^2 - 4h}{\alpha^2 + \lambda^2}, \quad \alpha''^2 = \frac{\alpha^2 \mu^2 - 4h}{\alpha^2 + \mu^2}.$$

On déduit de là

$$\frac{\alpha'^2 \alpha''^2 + 4h}{\alpha'^2 - \alpha''^2} = \frac{\mu^2 \lambda^2 + 4h}{\mu^2 - \lambda^2},$$

et par suite

$$\frac{\alpha'^2 \alpha''^2 + 4h}{\alpha'^2 - \alpha''^2} = \frac{\beta'^2 \beta''^2 + 4h}{\beta'^2 - \beta''^2} = \frac{\gamma'^2 \gamma''^2 + 4h}{\gamma'^2 - \gamma''^2},$$

ce qui prouve que les deux surfaces se coupent à angle droit.

Si l'on transforme par rayons vecteurs réciproques, on aura un système orthogonal formé de surfaces dont les équations auront la forme (α).

Le système précédent comprend comme cas particulier le système des surfaces du second degré. Il suffit de faire $h = \infty$.

11. Il nous reste à dire quelques mots des propriétés géométriques des surfaces comprises dans la forme (β).

D'abord, si l'on mène un rayon partant du centre, le produit des longueurs interceptées est constant. La surface est donc réciproque par rapport à elle-même.

Mais la propriété essentielle de ces surfaces est la suivante : toute sphère les coupe suivant une courbe qui appartient à une surface du second degré.

En effet, l'équation d'une sphère est de la forme

$$\rho^2 = P,$$

P étant un polynôme du premier degré. Si on remplace ρ^2 par P dans l'équation de la surface, on a une équation du second degré.

Il suit de là que la surface considérée a des sections circulaires. Toute sphère doublement tangente la coupe suivant deux cercles. En effet, la courbe d'intersection de la sphère et de la surface a dans ce cas deux points doubles, la sphère est donc doublement tangente à la surface du second degré qui passe par la courbe d'intersection, et par suite cette courbe d'intersection se décompose en deux cercles. Nous retrouverons ces sections circulaires en étudiant les sections planes de la surface.

12. La surface ayant une ligne double, le cercle imaginaire à l'infini, les sections planes auront deux points doubles, les points imaginaires placés à l'infini sur le cercle. Les sections planes sont donc ces courbes du quatrième degré dont nous avons parlé au n° 10, et qui sont susceptibles de former un système orthogonal. Il y aura des ovales de Cassini, des ovales de Descartes, etc.

La section par un plan tangent simple aura un point double. Elle rentre donc dans la classe des lemniscates (voir CHASLES, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXXVII) ou réciproques de coniques. On peut mener du point double deux tangentes à la courbe autres que les tangentes au point double. Il y aura donc deux tangentes doubles passant par chaque point de la surface.

Enfin la courbe de section par un plan tangent double aura en tout quatre points doubles; elle doit donc se composer de deux cercles.

Ainsi les sections circulaires seront données par les plans tangents doubles. Étudions la distribution de ces plans tangents doubles.

On peut mettre l'équation (β) sous une des cinq formes :

$$(\rho^2 + h^2)^2 + (\alpha^2 - 2h^2)x^2 + (\beta^2 - 2h^2)y^2 + (\gamma^2 - 2h^2)z^2 = 0,$$

$$(\rho^2 - h^2)^2 + (\alpha^2 + 2h^2)x^2 + (\beta^2 + 2h^2)y^2 + (\gamma^2 + 2h^2)z^2 = 0,$$

$$\left(\rho^2 + \frac{\alpha^2}{2}\right)^2 + (\beta^2 - \alpha^2)y^2 + (\gamma^2 - \alpha^2)z^2 + h^4 - \frac{\alpha^4}{4} = 0,$$

$$\left(\rho^2 + \frac{\beta^2}{2}\right)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)x^2 + (\gamma^2 - \beta^2)z^2 + h^4 - \frac{\beta^4}{4} = 0,$$

$$\left(\rho^2 + \frac{\gamma^2}{2}\right)^2 + (\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + (\beta^2 - \gamma^2)y^2 + h^4 - \frac{\gamma^4}{4} = 0.$$

On voit que les deux cônes et les trois cylindres obtenus en supprimant dans les cinq équations précédentes le premier terme sont doublement tangents à la surface. Leurs plans tangents seront donc des plans tangents doubles de la surface. On verrait, en cherchant les sections circulaires au moyen des sphères doublement tangentes (ce qui donne un calcul élégant), qu'il n'y a pas d'autre plan tangent

double. Ainsi les plans des sections circulaires se répartissent en 5 séries, et il passe 10 sections circulaires en chaque point de la surface.

13. Les lignes de courbure sont à la rencontre de la surface (β) et des cônes dont l'équation est

$$\frac{(\alpha^4 + 4h^4)}{\alpha^2 + \lambda^2} x^2 + \frac{(\beta^4 + 4h^4)}{\beta^2 + \lambda^2} y^2 + \frac{\gamma^4 + 4h^4}{\gamma^2 + \lambda^2} z^2 = 0.$$

Ces cônes sont tangents à 4 plans fixes. Ainsi les lignes de courbure ont pour enveloppe 4 sections planes de la surface qui se coupent aux ombilics. Il y a donc 24 ombilics.

Ces sections planes tangentes aux lignes de courbure sont très-remarquables ; elles se composent de 4 droites. En effet, le plan tangent à l'ombilic coupe la surface suivant un cercle de rayon nul, et, par suite, suivant un autre cercle. La section se compose d'un cercle et d'un point cercle, ou, si l'on veut, deux droites imaginaires. Il y a donc sur la surface des droites imaginaires se coupant deux à deux aux ombilics. Ces droites sont au nombre de 16. On peut voir dans ce fait de l'existence de droites sur une surface du quatrième degré la vérification d'un résultat obtenu dans la première partie.

14. On peut former évidemment avec les surfaces précédentes un système de coordonnées orthogonales qui comprendra comme cas particulier le système des coordonnées elliptiques. J'aurai peut-être occasion de revenir sur ces nouvelles coordonnées. J'ai pu obtenir de nouveaux systèmes de surfaces orthogonales analogues à ceux que M. Roberts a obtenus par les coordonnées elliptiques. Ce système peut aussi être employé pour l'intégration des équations abéliennes.

15. On obtiendrait les focales en cherchant le lieu des sphères de rayon nul doublement tangentes à la surface. Mais on peut obtenir trois d'entre elles d'une manière plus simple. Dans l'équation

$$\rho^4 + \frac{\alpha^2 \lambda^2 - 4h^4}{\alpha^2 + \lambda^2} x^2 + \frac{\beta^2 \lambda^2 - 4h^4}{\beta^2 + \lambda^2} y^2 + \frac{\gamma^2 \lambda^2 - 4h^4}{\gamma^2 + \lambda^2} z^2 - h^4 = 0,$$

faisons $\lambda^2 = -\alpha^2$: la surface se réduira à la portion du plan des yz limitée par la courbe

$$(y^2 + z^2)^2 - \frac{4h^4 + \beta^2 \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} y^2 - \frac{4h^4 + \gamma^2 \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2} z^2 - h^4 = 0.$$

Cette courbe est ligne double de l'enveloppe, c'est donc une des focales. On trouverait de même des focales dans les autres plans coordonnés. Mais une seule est suffisante pour définir la surface développable qui sert d'enveloppe au système.

Les résultats contenus dans ces Recherches ont été communiqués à l'Académie des Sciences le 1^{er} août 1864. Le même jour, M. Moutard communiquait une Note concernant

le système nouveau que nous avons étudié. Mais M. Moutard avait présenté le résultat de ses recherches le samedi 30 juillet à la Société Philomathique. Je ne songe donc pas à lui contester la priorité. Il m'est trop agréable de m'être rencontré dans mon premier travail avec un aussi habile géomètre. Je crois devoir reproduire une Note que M. Serret a présentée à l'Académie le 8 août 1864 et qui établit que je n'ai pu avoir connaissance des recherches de M. Moutard :

« J'ai eu l'honneur de communiquer à l'Académie le résumé d'un travail de M. G. Darboux, actuellement élève de l'École Normale supérieure.

» Ce travail, qui se rapporte à la théorie des surfaces orthogonales, contient, entre autres résultats importants, la découverte d'un *système triple* très-remarquable formé de surfaces du quatrième degré et que l'auteur considère à juste titre comme nouveau.

» Mais, par une coïncidence singulière, notre confrère, M. Ossian Bonnet, s'était chargé de présenter le même jour à l'Académie une Note de M. Moutard, dans laquelle se trouve établi le résultat que M. Darboux avait obtenu de son côté.

» Il est certain qu'aucun des deux auteurs n'a pu avoir connaissance du travail de l'autre; mais il est de mon devoir de déclarer que M. Darboux m'a remis son *Mémoire in extenso* dans le courant du mois de juin. J'ai voulu l'étudier dans tous ses détails avant de le présenter à l'Académie. Malheureusement mes occupations ne m'ont pas permis de le faire immédiatement. »

M. Moutard avait déjà publié des articles très-intéressants sur les surfaces du quatrième ordre qui appartiennent à une classe de surfaces qu'il propose d'appeler *anallagmatiques* (voir *l'Institut*, 11 mai 1864; *Nouvelles Annales*, 1864). C'est en cherchant les lignes de courbure de ces surfaces qu'il a rencontré le système orthogonal (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1^{er} août 1864).

NOTE I.

Sur les courbes du quatrième degré qui ont deux points doubles à l'infini sur le cercle.

1. Ces courbes sont, comme nous l'avons vu, les sections planes des surfaces du quatrième ordre qui forment le nouveau système orthogonal.

Elles ont été étudiées complètement, et l'on connaît leurs principales propriétés.

Elles ont seize foyers situés quatre à quatre sur des cercles orthogonaux. Si on les transforme par rayons vecteurs réciproques, la transformée se compose des ovals de Descartes toutes les fois que le pôle de transformation est en un des seize foyers. Il y a quatre points du plan par rapport auxquels la courbe est à elle-même sa réciproque. Ces points sont les quatre centres des cercles des foyers qui sont aussi les points de rencontre des tangentes doubles à la courbe.

On obtient ces courbes d'une infinité de manières en faisant la projection stéréographique de la courbe d'intersection d'une sphère et d'une surface du second

degré (*). On peut même les regarder comme la projection stéréographique des coniques sphériques. Il suffit de prendre le pôle de transformation aux points de rencontre de la sphère ayant pour grand cercle le cercle des quatre foyers et de la perpendiculaire au plan de la courbe menée par le point d'intersection des diagonales du quadrilatère formé par les quatre foyers. La courbe plane admet alors pour transformée une conique sphérique.

2. On peut donc déduire des propriétés des coniques sphériques toutes les propriétés des courbes du quatrième degré, qui en sont les transformées.

En particulier, on sait que l'on peut former sur la sphère un système de coniques sphériques homofocales et orthogonales. On aura donc dans le plan un système formé des courbes du quatrième ordre, orthogonales et homofocales, ce qu'il s'agissait de montrer.

Si l'on cherche l'équation différentielle du système orthogonal formé par les courbes du quatrième ordre, on trouve, en posant $x + y\sqrt{-1} = u$, $x - y\sqrt{-1} = v$,

$$\frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} = \frac{dv}{\sqrt{\varphi(v)}},$$

$$\varphi(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4.$$

Les considérations précédentes donnent donc un nouveau moyen d'arriver à l'intégrale de l'équation d'Euler. On l'obtient sous une forme assez remarquable :

$$\lambda \sqrt{(u - \alpha)(v - \alpha')} + \mu \sqrt{(u - \beta)(v - \beta')} + \nu \sqrt{(u - \gamma)(v - \gamma')} = 0.$$

3. Je terminerai en donnant une propriété nouvelle et intéressante de ces courbes. Cette propriété s'applique à la fois aux courbes planes et à leurs transformées sphériques.

Chacune de ces courbes a trois focales. Ces trois focales sont des courbes de même espèce que la courbe primitive, et les sphères ou les plans qui contiennent ces quatre courbes se coupent à angle droit.

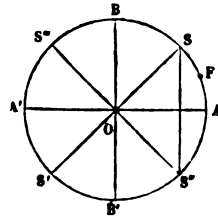
Ces focales jouissent de propriétés métriques. Si on prend trois points arbitrairement sur l'une quelconque des courbes et si l'on désigne par R, R', R'' les distances d'un point de l'espace à ces trois points, les équations des trois autres courbes focales de la première seront de la forme

$$\lambda R + \mu R' + \nu R'' = 0.$$

(*) Dans un article énoncé dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1864), j'ai donné cette proposition comme nouvelle. Elle ne diffère pas au fond de la proposition suivante, énoncée par M. Quetelet (*Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, V). Toute ligne aplanétique peut être regardée comme la projection stéréographique de la ligne d'intersection d'une sphère et d'un cône du second degré. Mais M. Quetelet n'a pas développé, du moins à ma connaissance, les conséquences de cette intéressante proposition.

C'est la généralisation du théorème trouvé par M. Dupin sur les coniques qui sont focales l'une de l'autre.

Ainsi l'ellipse sphérique admet une focale plane dans chaque plan principal. Si



on rapporte les points du plan principal aux deux axes AA', BB' de la conique, l'équation de la focale est

$$(x^2 + y^2 + a^2) - a^2 x^2 \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \alpha} - a^2 y^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \alpha} = 0,$$

φ désignant la demi-distance focale AF, et α le demi-axe AS. La courbe plane a pour foyers les quatre points S, S', S'', S''', et l'on a entre les distances aux trois foyers S, S', S'' la relation

$$r'' = r \cos \alpha - r' \sin \alpha.$$

Ainsi les coniques sphériques ont trois focales planes dans chacun de leurs plans principaux. Elles ont même une focale sphérique, mais cette focale est imaginaire. Toutes ces focales jouissent les unes par rapport aux autres des propriétés métriques que nous avons indiquées. Il semble que ces propriétés ne seront pas inutiles dans l'étude des coniques sphériques.

NOTE II.

Sur les surfaces du quatrième degré qui ont pour ligne double le cercle imaginaire à l'infini.

Ces surfaces jouissent de nombreuses propriétés. M. Moutard les a étudiées d'une manière très-rationnelle et très-complète. Je me propose d'indiquer ici quelques résultats que j'ai rencontrés incidemment. Nous considérerons les surfaces à plans principaux, mais les résultats s'étendent sans peine aux surfaces les plus générales.

Ces surfaces peuvent être considérées comme enveloppes de surfaces du second degré contenues dans l'équation

$$(6) \quad \lambda^2 + 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - k^2) + ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$

Toutes les génératrices de ces surfaces du second degré seront tangentes doubles de la surface. D'ailleurs on aura ainsi toutes les tangentes doubles, car en chaque point de la surface du quatrième degré il passe une surface du deuxième degré et deux génératrices de cette surface qui sont les deux tangentes doubles correspondant à ce point. Ainsi l'on aura bien toutes les tangentes doubles. Par un point de l'espace, il passera deux surfaces du second degré et quatre tangentes doubles.

Le cône circonscrit à la surface est évidemment du huitième degré, puisque le degré d'un cône circonscrit est égal à la classe d'une section plane. Il aura quatre arêtes doubles et dix plans tangents doubles qui seront les plans des sections circulaires passant par le sommet du cône.

La considération des surfaces du second degré est encore utile pour trouver les quatre pôles d'une section plane, c'est-à-dire les quatre points de rencontre des tangentes doubles à la courbe qui sont les centres des cercles des foyers.

Si l'on détermine dans l'ensemble des surfaces (6) celles qui sont tangentes au plan sécant, les points de contact seront les pôles cherchés. En effet, les surfaces du second degré seront coupées par le plan sécant suivant deux droites qui seront des tangentes doubles à la courbe de section de la surface du quatrième degré par le plan.

Soit

$$mx + ny + pz - 1 = 0$$

l'équation du plan. Écrivons que la surface (6) lui est tangente, nous aurons l'équation du quatrième degré

$$\frac{1}{2h^2\lambda - \lambda^2} = \frac{m^2}{2\lambda + a} + \frac{n^2}{2\lambda + b} + \frac{p^2}{2\lambda + c},$$

équation du quatrième degré en λ . Une fois λ déterminé, on aura facilement les points de contact.

Les surfaces de révolution dont l'équation est

$$\rho^4 + x^2(x^2 + y^2) + y^2z^2 - h^4 = 0$$

peuvent être considérées comme engendrées par un cercle tournant autour d'une droite non située dans son plan. L'équation de la surface peut alors être mise sous la forme

$$\lambda \cdot r + \mu \cdot r' + \nu \cdot r'' = 0,$$

r, r', r'' désignant les distances à trois points de l'axe de révolution.

Par l'intersection de deux surfaces ayant les mêmes plans principaux, on peut

faire passer trois surfaces de révolution. Soient en effet les équations

$$\begin{aligned}\rho^2 + \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - h^2 &= 0, \\ \rho'^2 + \alpha'^2 x^2 + \beta'^2 y^2 + \gamma'^2 z^2 - h'^2 &= 0.\end{aligned}$$

On peut combiner ces équations de manière à rendre égaux deux des coefficients de x^2 , de y^2 , de z^2 .

Ces surfaces ont été rencontrées par M. Besge (*Journal de Mathématiques*, t. XIV) dans la solution d'un problème de Géométrie. Le lieu des points de rencontre des géodésiques tangentes à une ligne de courbure et se coupant sous un angle constant se trouve sur une de ces surfaces ayant mêmes plans principaux que l'ellipsoïde.

M. Besge obtient en effet l'équation en coordonnées elliptiques

$$(\mu^2 + \nu^2 - 2\beta)^2 \tan^2 \theta = 4\beta(\mu^2 + \nu^2) - 4\mu^2 \nu^2 - 4\beta^2.$$

On n'a qu'à substituer

$$\begin{aligned}\mu^2 + \nu^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + k, \\ \mu^2 \nu^2 &= mx^2;\end{aligned}$$

on a une équation de la forme annoncée.

Enfin j'ajouterai que l'on peut déduire ces surfaces des surfaces du second degré par la transformation

$$\begin{aligned}x &= \frac{\lambda x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2 - k^2}, \\ y &= \frac{\mu y'}{x'^2 + y'^2 + z'^2 - k^2}, \\ z &= \frac{\nu z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2 - k^2}.\end{aligned}$$

Cette transformation permet de déduire des différentes formes des équations du second degré les différentes formes des équations de ces surfaces.



LE THALLIUM ET SES PRINCIPAUX COMPOSÉS,

PAR A. LAMY,

PROFESSEUR DE PHYSIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

INTRODUCTION.

Une des découvertes les plus belles et les plus fécondes dont les sciences physiques se soient enrichies depuis un demi-siècle est la nouvelle méthode d'analyse, dite *spectrale*, que MM. Bunsen et Kirchhoff ont publiée dans le courant du mois d'avril 1860. Cette méthode, capable de faire découvrir dans les produits naturels des traces de métaux que l'analyse ordinaire était impuissante à signaler, est fondée, comme on sait, sur ce fait capital, savoir : les vapeurs incandescentes des composés métalliques introduits dans une flamme décèlent toujours, dans le spectre de cette flamme, la présence et la nature du métal par des raies transversales brillantes, plus ou moins nombreuses et visibles, caractérisées par leur position respective, leur netteté ou leur diffusion, leur nombre et leur coloration.

Préparée par les recherches antérieures de plusieurs savants, entre autres Brewster, Herschel, Talbot, Miller, Wheatstone, Masson, Foucault, Plücker et Swan, la nouvelle méthode n'a été réellement constituée et rendue pratique que par les beaux et savants travaux des deux illustres professeurs de Heidelberg. De plus, elle a eu, presque à sa naissance, cette immense bonne fortune de prouver toute la puissance du secours qu'elle apportait aux investigations de la science, en révélant l'existence de deux métaux nouveaux, le *cæsium* et le *rubidium*, révélation dont elle devait recevoir le plus grand retentissement en même temps que la plus éclatante consécration.

Une découverte de même nature, plus récente, celle du *thallium*, est venue confirmer pour la troisième fois, dans le court espace de deux années, la fécondité et la généralité de la méthode nouvelle.

Ce sont les travaux dont ce dernier métal a été l'objet que nous nous proposons de faire connaître ici.

HISTORIQUE.

Au mois de mars 1861, un chimiste anglais, M. W. Crookes, annonçait dans le *Chemical News* qu'un dépôt sélénifère du Hartz, soumis à l'analyse spectrale, lui avait présenté une ligne verte caractéristique, et il concluait des expériences

auxquelles il avait soumis le dépôt, que cette raie verte décelait l'existence d'un nouvel élément appartenant probablement au groupe du soufre.

Le 18 mai suivant, M. Crookes publiait une seconde Note intitulée : *Nouvelles remarques sur le corps supposé un nouveau métalloïde*. Dans cette Note, l'auteur proposait pour l'élément nouveau le nom prévisionnel (*provisional*) de *thallium*, du mot grec *θαλλος*, ou du latin *thallus*, fréquemment employé pour exprimer la belle teinte verte d'une végétation jeune et vigoureuse. Il avait rencontré cet élément en grande abondance, disait-il, dans un échantillon de soufre de Lipari. Enfin il indiquait le procédé par lequel il pensait l'avoir isolé des corps étrangers auxquels il était associé. Ce procédé consistait à obtenir finalement une liqueur alcaline que l'on précipitait par l'hydrogène sulfuré.

« Je suis porté à penser, dit M. Crookes en terminant sa Note, que la poudre noire précipitée est le thallium lui-même, sans mélange d'aucun autre corps, et réduit de l'oxyde par l'hydrogène sulfuré. Ceci, toutefois, n'est qu'une simple conjecture, parce que la quantité de précipité que j'ai obtenue est trop faible pour établir ce point expérimentalement. »

On verra plus loin, par les propriétés du nouvel élément, que le précipité noir, obtenu à l'aide de l'hydrogène sulfuré, n'était pas du thallium.

Ces deux Notes sont les seules publications qui aient été faites sur le nouvel élément jusqu'au mois de mai 1862. Le 2 mai de cette année, j'annonçai à la Société impériale des Sciences de Lille que j'avais aperçu la raie verte de M. Crookes dans un dépôt des chambres de plomb de l'usine de M. Kuhlmann, à Loos, où l'on fabriquait l'acide sulfurique par la combustion de pyrites belges; et, à la séance suivante, c'est-à-dire le 16 mai, j'étais assez heureux pour présenter à la Société le nouvel élément, non pas sous la forme d'une poudre noire plus ou moins analogue au sélénium ou au tellure, mais à l'état et avec toutes les propriétés caractéristiques d'un véritable métal. Les précédentes dates sont authentiques, incontestables et incontestées. Il ne saurait donc y avoir le moindre doute sur mes droits à la découverte de la nature métallique du thallium et de ses propriétés essentielles (1).

ÉTAT NATUREL ET EXTRACTION (2).

Le thallium est en réalité très-répendu dans la nature; mais il y est disséminé en quantités si petites, que l'on ne doit pas s'étonner que son existence soit restée

(1) Ces droits ont reçu la haute sanction de l'Académie des Sciences, qui a approuvé les Conclusions du Rapport de M. Dumas sur nos recherches. Voyez le Rapport à la suite de cette Notice et la *Note historique*.

(2) Sur ce sujet, consulter les sources suivantes : *Journal of the Chemical Society*, 2^e série, vol. II, *On Thallium*. Ce travail de M. CROOKES contient l'ensemble de ses publications sur le thallium jusqu'au

ignorée jusqu'à ce jour. On le rencontre principalement associé avec le soufre, soit dans des sulfures natifs, comme dans certains échantillons de Sicile et de Lipari; soit dans des sulfures métalliques, en particulier dans les sulfures de fer que l'on nomme *pyrites*. Je citerai notamment les pyrites belges de Theux et d'Oneux, de Namur et de Philippeville, celles d'Alais dans le Gard, et certaines pyrites cuivreuses d'Espagne. Je l'ai trouvé aussi dans un échantillon provenant des environs de Nantes, et dans des pyrites blanches de Bolivie, en Amérique. Je ne l'ai pas rencontré dans les pyrites de Chessy, près de Lyon, non plus que dans une douzaine d'échantillons minéralogiques de diverses parties de l'Europe. Des calcopryrites, des cuivres gris, des galènes, sept ou huit échantillons de soufre natif de plusieurs provenances, des sélénitres du Hartz, des composés naturels de tellure ne m'en ont présenté aucune trace.

Je dois d'ailleurs faire observer que de résultats négatifs obtenus sur de petits fragments isolés, on ne saurait conclure à l'absence absolue du thallium dans la masse ou les terrains d'où ces fragments ont été tirés. Ainsi je n'ai pas trouvé le nouvel élément dans divers échantillons de soufre de Sicile, et pourtant j'en ai reconnu des traces non douteuses dans des cendres provenant de la combustion de grandes quantités de soufre ayant cette origine.

J'ajouterai que M. Crookes a signalé la présence du thallium dans du soufre de Lipari et dans des échantillons de blende, de calamine et de sulfure de cadmium de la Nouvelle-Montagne, en Belgique; que M. Böttger l'a trouvé dans des pyrites du Rammelsberg et dans un mélange salin provenant des eaux mères des salines de Nauheim; M. Mulder, dans une eau minérale de Java; M. Bischoff, dans un échantillon de pyrolusite de provenance inconnue; M. Herapath, dans certaines préparations médicinales de bismuth; enfin, M. Schrötter, dans la lépidolithe de Moravie et dans le mica de Zinnwald (Bohême).

Le prix élevé du soufre ayant conduit dans ces dernières années les fabricants d'acide sulfurique à le remplacer par le soufre des sulfures, on a brûlé des pyrites par centaines de mille kilogrammes, et l'on a produit du même coup de véritables minerais thallifères contenant jusqu'à $1\frac{1}{2}$ pour 100 de métal.

Brûlée dans des fours appropriés, la pyrite donne naissance, entre autres produits, à du gaz sulfureux, des acides sélénieux, arsénieux et de l'oxyde de thallium, qui sont entraînés jusque dans la première chambre de plomb avec des poussières ferrugineuses. Dans cette première chambre, si elle n'a d'autre commu-

mois de mai 1864. — *Journal für praktische Chemie*, LXXXVIII, LXXXIX, XC, XCI. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris*, années 1863, 1864. — *Annalen der Chemie und Pharmacie*, CXXVI, CXXVII, CXXIX. — *Académie de Vienne*, 1863. — *Société impériale des Sciences de Lille*, 2^e série, t. IX; 1862. — *Annales de Chimie et de Physique*, année 1863, avril. — *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LIV.

nication avec les suivantes que le conduit des gaz, comme dans les usines de M. Kuhlmann (1), se dépose et s'accumule l'oxyde, et par suite le sulfate d'oxyde de thallium, avec des sulfates de plomb, de fer, et les autres corps étrangers provenant de la pyrite. Mais si le mouvement de circulation de l'acide est possible à travers les chambres, comme cela a généralement lieu lorsqu'on brûle du soufre, le thallium est entraîné, disséminé dans la masse totale de l'acide produit, et les dépôts de sulfate n'en renferment plus que des quantités insignifiantes (2).

Je ne crois pas exagérer en estimant à $\frac{1}{100000}$ au moins la quantité du nouveau métal contenu dans les pyrites de la nature de celles qui étaient brûlées dans l'usine de M. Kuhlmann à Loos, et à $\frac{1}{100}$ environ la proportion que renfermaient les boues de la première chambre. Je vais indiquer maintenant comment on peut extraire le thallium de ces dépôts, par deux procédés que j'ai successivement employés.

Le premier consiste à traiter le minerai (boues de la première chambre) par l'eau régale avec le concours de la chaleur, puis de lessiver le produit. A cet effet, on place les boues dans des terrines en grès, avec une proportion d'eau régale en excès, sur les fours mêmes où s'opère la combustion des pyrites. On a soin de remuer fréquemment le mélange. Au bout de quelques jours, lorsque l'excès d'acide est à peu près complètement vaporisé, on procède au lessivage de la matière dans une cuve en bois, au moyen d'un courant de vapeur. On a soin de n'employer qu'une quantité d'eau relativement petite. Lorsque la lessive est bouillante, on arrête le courant de vapeur, on laisse refroidir quelques minutes pour permettre aux substances tenues en suspension de se déposer en grande partie, et la liqueur surnageant le dépôt est filtrée rapidement. En se refroidissant elle abandonne la plus grande partie du thallium qu'elle renferme sous la forme de paillettes jaunes de sesquichlorure. La partie non filtrée est encore lessivée une ou deux fois, selon sa richesse en chlorure. Enfin tout le sesquichlorure obtenu est transformé en sulfate et soumis aux traitements indiqués plus bas pour avoir le thallium pur.

Ce mode de préparation vaut mieux que celui que j'ai indiqué dans mon premier Mémoire, et dans lequel je faisais usage du gaz sulfureux. Il est d'ailleurs facilement applicable en petit, en opérant dans des capsules de porcelaine.

Au lieu de traiter les dépôts des chambres de plomb par l'eau régale, il sera toujours préférable, en grand, d'appliquer la méthode que je vais faire connaître.

J'avais d'abord pensé et dit qu'il suffisait de neutraliser par la litharge, ou, plus

(1) Cette disposition d'appareils peut expliquer, d'après M. Kuhlmann, pourquoi M. Böttger n'a pas trouvé de thallium dans les dépôts des chambres de plomb d'un grand nombre de fabriques d'Allemagne.

(2) Le thallium passe alors dans l'acide sulfurique du commerce et doit se retrouver naturellement dans cet acide et ses produits dérivés, comme la soude et l'acide chlorhydrique; de même qu'on le rencontre dans les cuivres du commerce (Crookes), préparés à l'aide de pyrites cuivreuses.

économiquement, par la chaux, les dépôts toujours fortement imprégnés d'acide sulfurique, puis de les laver trois ou quatre fois successivement avec le quintuple environ de leur poids d'eau bouillante. Les liqueurs réunies étaient évaporées aux $\frac{9}{10}$ à peu près dans une chaudière de fonte, et, dans le liquide refroidi et clair, on versait de l'acide chlorhydrique qui précipitait la plus grande partie du thallium à l'état de protochlorure.

Mais ayant reconnu que ce mode d'opérer me donnait un rendement notablement plus faible que le précédent à l'eau régale, je recherchai les causes de son infériorité, et je reconnus qu'une partie du thallium existait dans les boues à l'état de composés peu solubles, tels que chlorure et iodure; ce qui n'a d'ailleurs rien d'étonnant pour qui connaît la fabrication de l'acide sulfurique. Dès lors je modifiai la méthode d'extraction de la manière suivante.

On calcine directement les boues dans un four semblable aux fours à soude. On transforme ainsi les composés insolubles en sulfate soluble, et l'on évite en même temps l'emploi de la chaux qui donne toujours des masses trop volumineuses et difficiles à lessiver.

C'est dans les eaux de lavage de la matière calcinée que l'on verse de l'acide chlorhydrique pour précipiter le thallium à l'état de protochlorure. On retire d'ailleurs la plus grande partie du thallium, restant dans le liquide clair, au moyen du zinc. Le protochlorure, purifié comme je vais l'indiquer, sert à produire du sulfate de thallium pur, lequel est employé directement à l'extraction du métal.

Après avoir lavé ce protochlorure avec de l'eau aiguisée d'acide chlorhydrique, qui dissout moins de sel que l'eau pure, on le sèche, puis on le décompose, avec le concours de la chaleur, par le tiers de son poids d'acide sulfurique concentré. La décomposition étant assez difficile, il est nécessaire, pour l'avoir complète, de soutenir le feu jusqu'à ce qu'on obtienne un abondant dégagement de vapeurs d'acide sulfurique. Le sulfate acide fondu résultant est dissous dans vingt à vingt-cinq fois autant d'eau, et soumis à l'action d'un courant de gaz sulfhydrique qui précipite seulement le plomb, le mercure (1) ou l'argent. On filtre la liqueur, on l'évapore aux trois quarts et l'on abandonne au refroidissement pour cristalliser.

On peut obtenir immédiatement du thallium impur, en le précipitant sur des lames de zinc plongées dans les eaux de lavage concentrées. Mais ce thallium doit être transformé en sulfate acide, redissous, enfin purifié, ainsi que le précédent, par un second traitement tout à fait semblable à celui que nous avons indiqué, savoir : précipitation par l'acide chlorhydrique et lavage du chlorure, décomposition par l'acide sulfurique, purification par le gaz sulfhydrique et cristallisation du sulfate. Deux opérations successives de cette nature et deux ou trois cristalli-

(1) Les dépôts d'où j'ai extrait le thallium renfermaient toujours un peu de mercure.

sations dans l'eau distillée donnent du sulfate qu'on peut regarder comme parfaitement pur.

On comprend, en effet, que par l'acide chlorhydrique versé dans une dissolution de sulfate, on ne peut précipiter que les chlorures insolubles, c'est-à-dire ceux de thallium, de plomb, de mercure ou d'argent, le lavage enlevant d'ailleurs les sels solubles de tous les autres métaux. Ensuite, par l'action du gaz sulfhydrique sur la dissolution un peu acide, on isole tous les métaux dont les chlorures sont insolubles, ou, précisément, les seuls métaux, comme le plomb, le mercure et l'argent, dont les chlorures pouvaient accompagner celui de thallium.

Le sulfate, obtenu à l'état de pureté, sert à produire la plupart des autres combinaisons du nouveau métal, soit en préparant d'abord l'oxyde, puis le carbonate, soit en isolant le thallium pour le soumettre à l'action directe des divers agents chimiques.

Quant au métal lui-même, on l'extrait de l'une de ses combinaisons par l'électricité, le zinc, le charbon ou l'hydrogène.

Avec la pile, il suffit de quelques éléments Bunsen pour décomposer aisément le carbonate, le sulfate, le nitrate et même le sesquichlorure. C'est de ce sesquichlorure jaune que j'ai extrait le thallium pour la première fois par un courant électrique. On doit naturellement, selon la nature du composé, faire usage d'électrodes en platine ou en charbon.

Avec le zinc, la réduction est spontanée et des plus faciles. On plonge dans une dissolution de sulfate ou de nitrate un peu acide des baguettes cylindriques de zinc pur. On voit alors le thallium former des gaines cristallisées non adhérentes aux baguettes; il est détaché, lavé pendant quelques heures dans l'eau aiguisée d'acide chlorhydrique, puis lavé de nouveau dans l'eau pure. On peut, comme je l'ai pratiqué dans mes premiers travaux, l'éponger sur du papier buvard, le sécher en partie par compression, puis le fondre dans un creuset de porcelaine ou de fer avec du cyanure de potassium, ou dans un tube de verre traversé par un courant de gaz hydrogène.

Mais aujourd'hui je préfère, après avoir bien lavé le thallium, le placer dans un creuset de fer ou de fonte, le comprimer fortement avec un marteau ou un pilon, puis le fondre immédiatement. Par la compression ou le martelage, on amène aisément le métal mou à un degré de condensation moléculaire très-voisin de l'état naturel, et l'on n'éprouve pas de pertes sensibles à la fusion, tandis que par une dessiccation préalable, une partie notable du métal s'oxyde et est perdue pour la révivification, malgré l'emploi de poussière de charbon.

Le zinc peut séparer aussi le thallium de son protochlorure fondu, à la façon dont il réduit le chlorure d'argent.

Le même protochlorure est décomposé vivement par le potassium ou le sodium

à une température peu élevée. Le thallium obtenu dans ce cas n'est pas pur, il retient du métal alcalin.

Enfin le charbon et l'hydrogène peuvent réduire, le premier le carbonate et les oxydes de thallium, le second les oxydes seulement, tous deux avec le concours de la chaleur. Dans le premier cas, on ne doit faire intervenir que la quantité à peu près théorique de charbon nécessaire, si l'on veut obtenir le métal en gouttelettes capables de se rassembler en une seule masse; et encore, ces gouttelettes ne se réunissent-elles jamais complètement, quand on opère sur de petites quantités de matière.

Dans le deuxième cas, l'hydrogène isole bien à la vérité le métal; mais cette opération n'est ni facile ni complète. D'une part, l'oxyde supérieur, si c'est sur lui que l'on opère, est ramené à l'état de protoxyde; d'autre part, le protoxyde fond, adhère au verre ou à la porcelaine dont il prend la silice, et enfin se volatilise partiellement, entraîné par l'hydrogène. La réduction par l'hydrogène est sans doute un moyen excellent pour préparer le thallium chimiquement pur; mais on l'obtient à un état de pureté tout aussi grand, à l'aide de la pile électrique. Il suffit d'avoir la précaution de décomposer du sulfate de thallium parfaitement pur et de ne se servir que d'électrodes en platine.

MM. Crookes, Böttger et Werther ont publié divers procédés d'extraction du thallium plus ou moins simples et économiques, mais dont aucun ne nous paraît aussi avantageux que le dernier que nous avons proposé. La plupart de ces procédés ne sont d'ailleurs que des modifications de ceux que nous avons donnés dans nos premières publications, et appropriés à la nature des dépôts des fours à pyrites ou en général des substances complexes contenant du thallium. M. Werther, après une série de traitements successifs par la soude, le sulfhydrate d'ammoniaque, l'acide sulfurique et l'iodure de potassium, fond l'iodure de thallium avec du cyanure de potassium. Ce moyen lui paraît préférable à la précipitation du métal par le zinc, parce que, dit-il, le moment précis où cette précipitation est complète est difficile à saisir. Sans me rendre bien compte de cette préférence, je puis dire en tout cas que ce procédé de M. Werther n'est guère économique et ne saurait être appliqué en grand.

PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DU THALLIUM.

Le thallium présente tous les caractères d'un véritable métal, et, par la plupart de ses propriétés physiques, se rapproche beaucoup du plomb. Doué d'un vif éclat métallique dans une coupure fraîche, il paraît jaune lorsqu'on le frotte contre un corps dur; mais cette teinte est due à une oxydation, car le métal qui vient d'être isolé par la pile électrique au sein d'une dissolution aqueuse, ou fondu dans un cou-

rant d'hydrogène, est blanc, avec une nuance gris-bleuâtre qui rappelle l'aluminium.

Le thallium est très-mou, peu tenace, mais très-malléable. On le lamine aisément, sans déchirure, sous la forme de rubans ayant seulement quelques millièmes de millimètre d'épaisseur; mais on ne l'étire à la filière qu'avec beaucoup de précautions. Il peut être rayé par l'ongle et coupé facilement au couteau. Il tache le papier en laissant des traces à reflets jaunes. Sa densité à la glace fondante est 11,862. M. Lucien de la Rive, en prenant la densité par rapport à l'huile de naphte sur un échantillon de métal que nous avons préparé, a obtenu le même nombre que nous. D'après le même savant, les actions mécaniques du marteau et de la filière déterminent une faible diminution de densité.

Le thallium fond à 290 degrés environ du thermomètre centigrade et ne se volatilise qu'au rouge blanc. Les lingots obtenus par fusion ont une texture cristalline visible à leur surface quand on a soin de les mettre dans l'eau pour dissoudre la pellicule d'oxyde ou de carbonate qui les recouvre, et qui est attestée dans leur masse par le cri qu'ils font entendre quand on les plie.

Pour chaleur spécifique, nous avons obtenu comme moyenne déduite de deux expériences, par la méthode de M. Regnault, le nombre de 0,0325; M. Regnault lui-même a trouvé 0,0335.

La conductibilité pour l'électricité, déterminée par MM. Mathiessen et Vogt (1) sur deux échantillons de thallium que j'avais mis à leur disposition, peut être représentée par 9,4 à la température zéro, celle de l'argent étant 100; et la différence de conductibilité à zéro et à 100 degrés est égale à 31,7 pour 100. Le premier de ces résultats est peu différent de celui que donne le plomb, dont la conductibilité électrique est 8,5; mais le second sépare complètement le thallium des métaux proprement dits, tels que le plomb, le zinc, l'étain, le cadmium, pour le rapprocher des métaux alcalino-terreux.

D'après M. Lucien de la Rive, qui a fait un travail analogue à celui de MM. Mathiessen et Vogt (2), le coefficient de conductibilité électrique du thallium serait seulement 8,64; c'est-à-dire presque identique à celui du plomb, et le coefficient de résistance avec la température égal à 0,0038, nombre compris dans les limites entre lesquelles se trouvent, pour la plupart des métaux lourds, les valeurs de ce coefficient, mais différant notablement de celui trouvé par MM. Mathiessen et Vogt.

Enfin le thallium et ses composés sont diamagnétiques. Un cristal de sulfate, suspendu entre les faces polaires de l'appareil de Faraday, prend la direction équatoriale. Un petit cylindre du métal lui-même s'oriente aussi transversalement sous l'influence magnétique. Dans ces expériences, on remarque que les effets d'induc-

(1) *Transactions philosophiques*; mars 1863.

(2) *Comptes rendus*, t. LVI; mars 1863.

tion développés dans le thallium par la rupture et la fermeture du circuit de la pile sont très-peu intenses, analogues à ceux qu'on observe dans le plomb, et permettent par conséquent de ranger cet élément parmi les métaux mauvais conducteurs de l'électricité et de la chaleur. Un essai de mesure directe de conductibilité pour la chaleur que j'avais tenté, insuffisant pour la détermination du coefficient, avait été assez approché toutefois pour légitimer la conclusion précédente.

Mais la propriété physique par excellence du thallium, celle qui, d'après les admirables travaux de MM. Kirchhoff et Bunsen, caractérise l'élément métallique, celle qui nous a conduit à sa découverte, c'est la faculté qu'il possède de donner à la flamme pâle du gaz une coloration verte d'une grande richesse, et dans le spectre de cette flamme une raie unique, aussi isolée, aussi nettement tranchée que la double raie jaune du sodium, ou la raie rouge du lithium. Cette raie verte reste simple dans un spectroscopie à 4 prismes qui dédouble nettement la raie jaune; elle peut, d'ailleurs, être renversée avec la plus grande facilité par la lumière du soleil. Sur l'échelle micrométrique de mon appareil, elle occupe la division 120-121, celle du sodium étant à la division 100 (voyez *fig. 3, Pl. I*). Elle correspond au n° 1442,6 de l'échelle du gigantesque spectre solaire donné par M. Kirchhoff dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin pour 1861*. Mais elle ne coïncide avec aucune des raies visibles de Fraunhofer, de sorte qu'on ne peut conclure à la présence du thallium dans l'atmosphère du soleil. Je dois cette détermination précise à l'extrême obligeance de MM. Kirchhoff et Bunsen eux-mêmes.

La plus légère parcelle de thallium ou mieux de l'un de ses chlorures, qui sont beaucoup plus volatils, fait apparaître la ligne verte avec un éclat vraiment extraordinaire, mais peu durable. $\frac{1}{50000000}$ de gramme peut encore, d'après mes évaluations, être aperçu dans un composé.

Nous venons de dire que dans l'appareil pour l'analyse spectrale, même à 4 prismes, le spectre du thallium se réduisait toujours à la raie verte, unique, indivisible, dont nous avons fait connaître la position. Dans la flamme plus chaude du gaz tonnant, nous n'avons vu encore que la même raie simple; mais la haute température de l'étincelle électrique fait apparaître un assez grand nombre de raies, comme cela arrive pour tous les métaux. M. Allen Miller, connu pour son habileté dans les observations d'analyse spectrale, a indiqué, comme appartenant essentiellement au spectre du thallium et non à l'air atmosphérique, un certain nombre de lignes nouvelles, parmi lesquelles on remarque surtout cinq raies principales, savoir : une raie très-faible dans l'orangé, deux raies d'intensité à peu près égale dans le vert, un peu au delà de la raie brillante caractéristique; une troisième raie verte beaucoup plus faible, ces trois lignes dans le vert étant à peu près équidistantes; enfin une raie brillante et bien définie dans le bleu. Toutes ces raies

sont très-visibles sur les bords du spectre et presque insensibles en son milieu. On sait que cette apparence est caractéristique des raies métalliques et les distingue nettement des raies atmosphériques.

M. Miller a obtenu aussi une image photographique du spectre du thallium. Il a ainsi reconnu l'existence de neuf groupes principaux et de quelques groupes secondaires de raies dans la partie invisible du spectre, l'aspect de cette image rappelant le spectre du cadmium et surtout celui du plomb (1).

D'après M. Nicklès (2), les combinaisons thalliques contenant du sodium et notamment du chlorure de sodium ne posséderaient pas la propriété de colorer la flamme en vert et de développer la raie spectrale caractéristique, parce que la flamme et la raie jaune masquent ces phénomènes. D'où il résulterait que pour rechercher le nouveau métal dans les eaux mères ou les produits naturels qui en contiennent, il faudrait commencer par les séparer du sodium, à l'aide d'un des moyens que j'ai fait connaître.

Cette opinion de M. Nicklès est trop absolue. En effet, en examinant soit des combinaisons thalliques mélangées à des proportions considérables de sel marin, soit des alliages de sodium et de thallium, j'ai toujours pu distinguer la raie verte. Il est vrai qu'en faisant l'expérience qu'indique M. Nicklès, c'est-à-dire en essayant au spectroscope le liquide résultant de la précipitation complète d'acétate de thallium par un excès de sel marin, on n'aperçoit pas la raie verte dans l'illumination provoquée par la lumière jaune; mais on la fait apparaître facilement en évaporant un peu du liquide et soumettant à l'examen le résidu salin.

Il est à remarquer du reste que le chlorure de thallium est beaucoup moins soluble dans une liqueur saturée de sel marin que dans l'eau pure. Il ne faut pas perdre de vue non plus que la raie verte disparaît bien plus vite que la raie jaune, à cause de la plus grande volatilité relative des composés thalliques.

ACTION PHYSIOLOGIQUE DU THALLIUM.

Le thallium et ses composés doivent être considérés comme des poisons énergiques. J'en avais ressenti moi-même et signalé les effets dès 1862 (3), à la suite de mes recherches sur le nouveau métal. Dans le cours de l'année 1863, j'ai confirmé mes premières indications par des expériences faites sur des poules, des canards et des chiens (4).

(1) *Proceedings of the Royal Society*, XII. — *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. LXIX.

(2) *Comptes rendus*, t. LVIII, p. 132.

(3) Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 8 décembre 1862, et inséré aux *Annales de Chimie et de Physique*, t. LXVII.

(4) *Comptes rendus*, t. LVII; et t. X des *Mémoires de la Société impériale des Sciences de Lille*, 1863.

Cinq grammes de sulfate de thallium ont suffi pour déterminer la mort de deux poules, six canards, deux jeunes chiens âgés de deux mois, et une chienne de moyenne taille. Un troisième jeune chien du même âge que les premiers a succombé quarante heures après avoir pris 1 décigramme seulement du même sel.

Comme symptômes de l'empoisonnement provoqué par le thallium, j'ai observé en premier lieu la douleur, dont le siège est dans les intestins, et qui se manifestait chez les chiens par des élancements douloureux se succédant avec rapidité, semblables à des secousses électriques; en second lieu, chez tous les animaux, des tremblements, puis une paralysie plus ou moins complète des membres inférieurs.

Je puis ajouter que le thallium est aussi funeste aux plantes qu'aux animaux.

J'ai signalé toute l'importance de cette action toxique du thallium en ce qui touche la thérapeutique et les recherches de médecine légale.

Mes observations ont été confirmées et complétées par MM. Grandeau et Paulet. Voici les principales conclusions du Mémoire présenté par M. Paulet à l'Académie des Sciences le 7 septembre 1863 :

« Le thallium est un poison dont l'action est beaucoup plus énergique que celle du plomb.

» Le carbonate de thallium administré à forte dose (1 gramme) tue les lapins en quelques heures.

» Donné à plus faible dose, il tue en quelques jours en produisant un ralentissement de l'action respiratoire et des troubles dans la locomotion.

» Son action est la même, soit qu'on l'emploie en frictions sur la peau, soit qu'on l'injecte dans le tissu cellulaire sous-cutané : seulement, dans ce dernier cas, une très-faible dose peut amener la mort. »

PROPRIÉTÉS CHIMIQUES.

Le thallium se ternit promptement à l'air en se recouvrant d'une pellicule d'oxyde qui devient gris-blanchâtre par sa conversion en carbonate. Dans l'air confiné d'un flacon, il devient noirâtre. Une élévation peu considérable de température, la chaleur de l'eau bouillante par exemple, le fait brunir plus rapidement; mais, par son immersion dans l'eau, il reprend immédiatement son éclat métallique, en offrant le moiré qui témoigne de sa structure cristalline.

Chauffé au chalumeau, le thallium présente des phénomènes qui ne permettent pas de le confondre avec le plomb. Il fond rapidement et s'oxyde en répandant une fumée peu odorante et difficile à définir, blanchâtre par moments, mais mêlée de tons rougeâtres ou violacés. Il continue à fumer assez longtemps, même après qu'on a cessé de le chauffer.

Son affinité pour l'oxygène est telle, que dans ce gaz, à une température supé-

rieure à 300 degrés, il brûle avec un vif éclat. L'expérience se fait, soit en plaçant un globule de métal dans une coupelle chauffée au rouge et en plongeant celle-ci dans l'oxygène, soit en faisant arriver un courant de ce gaz sur du thallium maintenu en fusion dans un ballon de verre au moyen d'une lampe à alcool.

Ce thallium est attaqué par le chlore, lentement à la température ordinaire, rapidement à une température supérieure à 300 degrés. Alors le métal fondu peut devenir incandescent sous l'action du gaz, si celui-ci arrive en abondance, et il donne naissance à un liquide jaunâtre qui se prend par le refroidissement en une masse d'une couleur plus pâle.

L'iode, le brome, le phosphore s'unissent aussi au thallium avec chaleur, mais sans développement de lumière, pour constituer des iodures, bromures et phosphures semblables aux composés correspondants du plomb.

La production du sulfure a lieu avec lumière, si l'on projette de minces fragments de thallium dans du soufre fondu.

Le sélénium, qui paraît l'accompagner fréquemment dans les pyrites, forme avec lui un séléniure à équivalents égaux, très-fusible et d'une couleur gris-noirâtre. Enfin, le thallium forme des alliages avec la plupart des métaux, en particulier le zinc, le plomb, l'antimoine, le cuivre, l'argent, le mercure et le platine.

L'eau n'est pas décomposée par le thallium à la température de l'ébullition; elle ne fait que lui rendre et lui conserver son éclat, à cause de la solubilité du protoxyde; mais ses éléments sont séparés à froid avec le secours d'un acide.

Il est vrai de dire que l'action décomposante du métal sur l'eau des acides sulfurique et nitrique dilués est très-lente, tandis qu'elle devient très-vive lorsque ceux-ci sont concentrés, surtout si l'on fait intervenir la chaleur. L'acide chlorhydrique, au contraire, même bouillant, n'attaque que très-difficilement le thallium. Dans ces circonstances, il se forme des sels blancs, sulfate et azotate solubles dans l'eau, parfaitement cristallisables, et un chlorure très-peu soluble, mais pouvant aussi cristalliser.

Caractères généraux des sels de thallium. — Nous achèverons de caractériser le nouveau métal par les réactions que présentent ses sels au minimum en général, le sulfate et le carbonate en particulier. Ces réactions, comme on va le voir, tout à fait contradictoires au point de vue de la classification actuelle, semblent rapprocher à la fois le thallium des métaux de la 1^{re}, de la 3^e et de la 4^e section.

Les dissolutions aqueuses de ces sels ne précipitent ni par les alcalis et les carbonates alcalins, ni par les cyanoferrures jaune et rouge de potassium suffisamment dilués ou acides. Avec elles, l'acide chlorhydrique produit un précipité blanc de protochlorure fort peu soluble; l'iodure de potassium, le chlorure de platine, un iodure jaune et un chlorure double plus insolubles encore; le chromate de potasse, un chromate jaune qui se dissout à peine dans un excès d'alcali.

L'hydrogène sulfuré est sans action apparente sur les mêmes dissolutions, si elles sont acides ; il en sépare une partie du métal à l'état de sulfure gris-noirâtre, altérable à l'air, quand elles sont neutres ; et lorsqu'elles sont alcalines, il agit comme le sulfhydrate d'ammoniaque, en précipitant tout le thallium sous la forme de sulfure noir, volumineux, se ramassant facilement au fond des vases, et insoluble dans un excès de sulfhydrate ammoniacal.

Le zinc réduit le thallium de ses dissolutions diverses, plus particulièrement du sulfate, en lamelles cristallines brillantes, parfois allongées et ramifiées. Dans les mêmes circonstances, l'étain et même le fer ne produisent rien de semblable.

Enfin la décomposition électrolytique des sels de thallium est remarquable, et assez semblable d'ailleurs à celle des dissolutions salines du plomb (1).

Lorsqu'on fait passer le courant électrique de deux ou trois éléments Bunsen dans une dissolution de sulfate de thallium, en se servant de deux lames de platine pour électrodes, on voit un dépôt noir se former sur la lame positive, et une coloration brune envahir toute la dissolution, en même temps que le métal se révivifie sur la lame négative. Ce dépôt augmente peu à peu, puis se détache partiellement sous la forme de poudre ou de lamelles non cristallisées. Vers la fin de la décomposition, la liqueur devenue acide s'éclaircit ; le dépôt se dissout sur la lame positive, où n'apparaît plus que de l'oxygène pendant que le thallium continue à se révivifier sur l'électrode négative. Que l'on emploie 5, 10 ou 25 éléments Bunsen, toujours on observe des phénomènes analogues.

La substance noire qui se forme sur l'électrode positive, et que j'avais remarquée déjà en avril 1862, lorsque j'isolai pour la première fois le thallium du sesquichlorure, devient brune en se desséchant, et n'est autre chose que la variété de peroxyde à laquelle j'ai assigné la composition TlO^3 .

On se rend assez bien compte de sa formation par la suroxydation que le protoxyde du sulfate de thallium éprouve sous l'influence de l'oxygène naissant qui arrive à l'électrode positive.

OXYDES DE THALLIUM.

Le thallium peut s'unir à l'oxygène au moins en deux proportions, pour former un protoxyde et un oxyde supérieur.

Protoxyde, TlO . — Le protoxyde est très-curieux par les aspects divers qu'il peut présenter ou les transformations qu'il peut subir. D'abord il est très-soluble dans l'eau : sa dissolution incolore est caustique, a une réaction alcaline nettement prononcée, et présente une saveur et une odeur analogues à celles de la potasse.

(1) *Revue des Sociétés savantes*; avril 1864.

Comme la potasse, il est soluble dans l'alcool; comme elle, il déplace de leurs combinaisons salines les bases insolubles, telles que les oxydes de cuivre, de zinc, l'alumine et la magnésie; comme elle encore, mais à un degré moindre d'énergie, il absorbe l'acide carbonique de l'air pour constituer un carbonate soluble dans l'eau, insoluble dans l'alcool. Ensuite, à l'état solide, il est blanc-jaunâtre ou rouge-noir, selon qu'il est hydraté ou non, souvent cristallisé en longues aiguilles prismatiques, et fusible, au-dessus de 300 degrés, en un liquide brun-jaunâtre, qui se prend par le refroidissement en un enduit jaune extrêmement adhérent au verre et à la porcelaine. En réalité, l'oxyde attaque ces matières, en s'emparant d'une partie de la silice qu'elles renferment. Aussi ne peut-on le chauffer ni trop fort ni trop longtemps dans des vases de verre ou de porcelaine sans les altérer plus ou moins profondément.

On obtient le protoxyde en précipitant par la baryte l'acide sulfurique du sulfate de thallium pur. La dissolution incolore, évaporée au contact de l'air, devient de plus en plus alcaline et caustique, répand une forte odeur de lessive, noircit en partie sur les bords surchauffés du vase, mais absorbe en même temps l'acide carbonique de l'air, de façon que pour un certain degré de concentration et par refroidissement, on obtient un curieux mélange d'oxyde noir, de carbonate gris-blanc et de protoxyde jaune, tous trois cristallisés.

Mais si l'on a soin d'évaporer rapidement la moitié de la dissolution à feu nu, dans une cornue de verre par exemple, puis d'achever la concentration dans une capsule de porcelaine, sous le récipient de la machine pneumatique, en présence d'acide sulfurique concentré, on voit une substance jaunâtre se déposer sous forme cristalline; avec le temps, de longues aiguilles se développent en brunissant peu à peu au fur et à mesure de l'évaporation. Quand une croûte noirâtre recouvre la surface, si on met fin à l'opération, on reconnaît, en détachant les cristaux, que du côté du fond de la capsule ils sont jaunes, de manière que l'ensemble constitue un curieux échantillon de longs faisceaux prismatiques, panachés de noir et de jaune.

Il résulte de là que le protoxyde solide est blanc-jaunâtre, mais que par dessiccation, par une sorte de déshydratation qui se produit dans le vide, même à la température ordinaire, il devient rouge-noir, tout en conservant la même forme cristalline. Les expériences suivantes vont mettre hors de doute cette conséquence.

D'abord, en évaporant une dissolution d'oxyde dans une capsule de porcelaine simplement recouverte d'une lame de verre, on observe qu'en enlevant la lame, et chassant au besoin la vapeur par l'air des poumons, les parois de la capsule deviennent subitement noires; qu'en remplaçant la lame, elles repassent immédiatement au jaune, et qu'on peut reproduire à volonté ces alternatives de jaune et de noir.

Ensuite, en concentrant une dissolution pareille dans un ballon à col effilé, et fermant ce col à la lampe pendant l'ébullition même, on emprisonne, à l'abri du contact de l'air, l'oxyde déposé sur les parois comme l'oxyde qui cristallisera par le refroidissement de la liqueur restante. Or, cet oxyde est resté jaunâtre pendant tout le temps de la concentration, et il conserve sa couleur indéfiniment. Dans ce cas, l'intérieur de tout le ballon est évidemment saturé de vapeur d'eau qui doit maintenir l'oxyde à l'état hydraté. Mais que l'on renverse le ballon, pour amener le liquide dans la partie effilée du col, que l'on chauffe ensuite modérément, sur la flamme d'une lampe à alcool, quelques points de la paroi jaune, pour détruire la saturation qui existe en ces points, et l'on voit la matière jaune pâlir en se desséchant, puis noircir tout à coup. Si on l'éloigne du feu, elle repasse au jaune, soit lentement en absorbant graduellement de l'humidité, soit rapidement lorsqu'on fait arriver sur elle le liquide du col. On peut chauffer de nouveau et faire passer au noir encore la même partie, pour la ramener au jaune aussi facilement, par son contact avec le liquide.

Ces expériences curieuses suffisent pour démontrer que l'oxyde jaune peut devenir noir par le seul fait d'une déshydratation.

Maintenant, si l'on ouvre sous l'eau récemment bouillie des ballons semblables au précédent, on remarque que l'oxyde jaune se dissout, mais jamais d'une manière complète, et reproduit une dissolution incolore, jouissant de toutes les propriétés qu'offrait le protoxyde avant son passage à l'état solide et les transformations qu'on lui a fait subir. D'ailleurs, la partie insoluble dans l'eau est restée parfaitement soluble dans les acides.

Dans l'intention de préparer une vingtaine de grammes de ce protoxyde sec, nous avons disposé, au milieu d'un vase plein d'eau dont on pouvait élever la température à volonté, un ballon à col étranglé, communiquant avec un récipient refroidi, celui-ci étant lui-même mis en communication avec la machine pneumatique. Le ballon ayant reçu la dissolution de protoxyde, et les fermetures étant assez hermétiques pour tenir le vide, on a fait jouer la pompe et commencé l'évaporation, en chauffant d'abord seulement la partie supérieure du ballon. On est certain, par la marche même de l'opération, que cette distillation, qui a duré huit heures, s'est toujours soutenue vive et continuée, de manière que l'air a dû être expulsé complètement du ballon. Malgré cette absence d'air, les parois supérieures ont noirci à mesure que le liquide diminuait, comme si on eût opéré à l'air libre, tandis qu'en contact avec la liqueur il y avait une zone d'oxyde constamment jaune; et quand, par hasard, quelques bulles de vapeur, soulevées brusquement du fond du vase, projetaient la dissolution sur les parties noircies, celles-ci redevenaient immédiatement jaunâtres, pour repasser au noir par une dessiccation ultérieure.

Vers la fin de l'opération, quand tout parut solidifié, on porta le ballon à 100 degrés, puis on le ferma à la lampe, en fondant la partie étranglée du col.

Toute la masse solide était noirâtre, à l'exception d'une petite portion jaune, celle qui, pendant l'évaporation, s'était détachée des parois et était tombée au fond du ballon.

Jeté dans l'eau, l'oxyde noir jaunissait d'abord, puis passait peu à peu au brun, en ne se dissolvant plus que d'une manière incomplète. La liqueur avait une forte réaction alcaline et présentait toutes les propriétés des sels au minimum. Le même oxyde noir se dissolvait aisément, sans résidu, dans l'acide nitrique dilué.

C'est un fait digne de remarque que le protoxyde de thallium perd en grande partie sa solubilité en perdant son eau d'hydratation. Sous ce nouvel état, il se rapproche alors beaucoup du protoxyde de plomb, qui est, comme on sait, un peu soluble.

Il ne faudrait pas conclure de ce qui précède que la coloration noire du protoxyde est toujours produite par une déshydratation. Ce composé, en effet, a une grande tendance à absorber l'oxygène, et passe aisément à un degré d'oxydation supérieur en noircissant encore. Nous étudierons plus loin le peroxyde formé dans ces circonstances.

Ajoutons que le meilleur moyen de préparer le protoxyde parfaitement pur consiste à dissoudre l'huile pesante, que nous avons appelée *alcool thallique*, dans l'eau. Nous y reviendrons en exposant nos recherches sur les alcools thalliques en général.

Peroxyde brun, TlO^3 . — Un alcali versé dans une dissolution de sesquichlorure de thallium détermine la formation d'un oxyde brun qui se dépose, et de protochlorure de thallium qui reste en dissolution, quand la liqueur contient suffisamment d'eau. Nous avons vu que le même oxyde se formait au pôle positif de la pile, dans la décomposition électrolytique d'un sel de thallium.

Cet oxyde brun est insoluble, et n'a aucune action sur les couleurs végétales. Séché vers 100 degrés, il retient un équivalent d'eau, qu'une forte chaleur lui fait perdre sans altérer sensiblement sa couleur. Au rouge vif, il se décompose et abandonne de l'oxygène. Mis en contact avec les acides sulfurique, nitrique et chlorhydrique, il s'échauffe immédiatement et forme des composés salins, hygrométriques, solubles dans l'eau, mais se décomposant plus ou moins complètement, si la liqueur n'est pas acide.

Chauffé au delà de 400 degrés, le sulfate de peroxyde fond et prend une coloration jaunâtre, en même temps qu'il abandonne de l'oxygène et de l'acide sulfurique. Quand tout dégagement gazeux a cessé, le résidu blanc obtenu est du sulfate acide de protoxyde de thallium. De ce sel, une chaleur rouge peut dégager encore de l'acide sulfurique anhydre et produire finalement du sulfate neutre de thallium, très-sensiblement moins fusible.

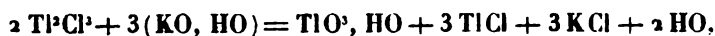
Le perchlorure est blanc aussi, cristallin, mais moins stable encore que le sulfate. Il fond avec la plus grande facilité, et se décompose presque aussitôt en abandonnant du chlore.

Les analyses que nous avons faites pour arriver à la composition de l'oxyde brun nous conduisent à le regarder comme un trioxyde hydraté. En effet, d'abord :

	Trouvé.	Calculé.
I. 2 grammes de trioxyde sec perdent en eau à 300 degrés....	0,069 ^{gr}	0,076 ^{gr}
II. 3 " " " "	0,110	0,114

Ensuite, l'oxyde brun déshydraté, chauffé dans l'oxygène sec et pur, n'augmente pas de poids. Or, nous verrons plus loin que l'oxyde saturé d'oxygène contient 3 équivalents de ce gaz pour 1 de thallium. De plus, l'analyse suivante confirme cette identité de composition. En effet, en introduisant 1^{gr},400 d'oxyde brun déshydraté, avec un poids égal d'acide sulfurique concentré, dans un très-petit ballon auquel était soudé un tube pour recueillir les gaz, puis chauffant le mélange jusqu'à cessation de dégagement gazeux, on a obtenu 70 centimètres cubes d'oxygène à zéro degré et sous la pression 760 millimètres. Le trioxyde passant à l'état de protoxyde abandonnerait théoriquement 68^{cc},4.

Je puis ajouter que cette composition de l'oxyde brun rend parfaitement compte des quantités relatives de ce peroxyde et de protochlorure qui se produisent dans la précipitation du sesquichlorure par un alcali. La réaction se formulant comme il suit :



on doit obtenir :

Oxyde brun hydraté pour 1 gramme de sesquichlorure.....	0,231 ^{gr}
" " 5 " " 	1,155
" " 7 " " 	1,617

et l'expérience a donné :

Oxyde brun hydraté pour 1 gramme de sesquichlorure.....	0,229 ^{gr}
" " 5 " " 	1,138
" " 5 " " 	1,150
" " 7 " " 	1,610

Enfin, par son aspect, par ses propriétés, comme par sa composition, le chlorure résultant de cette réaction est bien du protochlorure.

Peroxyde noir, TiO^3 . — En brûlant directement le thallium dans l'oxygène, on

donne naissance à un peroxyde noir, qui doit aussi être considéré comme un trioxyde isomère avec le précédent. Voici quelques détails sur sa production et ses propriétés.

De l'oxygène sec et pur, arrivant sur le métal fondu, le rend incandescent et le transforme rapidement en un oxyde fusible au rouge, d'une texture cristalline lorsqu'il est refroidi, et offrant les caractères d'un mélange de protoxyde et de peroxyde. En partie soluble dans l'eau, qu'il rend franchement alcaline, cet oxyde a une poussière brun-jaunâtre. Soumis de nouveau à l'action de l'oxygène, à une température inférieure au rouge, il augmente encore de poids, et devient tout à fait noir-violacé, lorsque la saturation est complète. Ainsi transformé, l'oxyde ne fond plus que difficilement à la chaleur de la lampe, n'adhère plus au vase où l'on opère, et est insoluble dans l'eau qu'il laisse neutre aux papiers réactifs. Il est insoluble aussi dans les alcalis.

Mais si ce peroxyde ne fond pas au rouge sombre, il éprouve au rouge vif, dans un creuset de platine ou de porcelaine, une sorte d'ébullition, en dégageant de l'oxygène mêlé à des vapeurs d'oxydes qui se condensent sur les parois ou au couvercle des creusets (1). En outre, il traverse les creusets de porcelaine. Quand toute émission de gaz a cessé, la masse restante est brun-jaunâtre, semblable au protoxyde fondu, comme lui en partie soluble dans l'eau qu'elle rend alcaline, comme lui encore formant avec les acides des sels qui ne précipitent ni par les alcalis, ni par les carbonates alcalins.

L'acide sulfurique concentré attaque très-difficilement à froid l'oxyde noir, mais il peut s'unir à lui sous l'influence de la chaleur. Le sulfate produit, chauffé convenablement, se décompose, comme le sulfate de peroxyde brun, en dégageant de l'oxygène.

La décomposition m'a paru présenter deux phases distinctes. Il y a d'abord comme un temps d'arrêt où l'acide sulfurique cesse de distiller et l'oxygène de se dégager. Le corps blanc produit, amorphe, se décompose au contact de l'eau en donnant lieu à un précipité d'oxyde brun et à du sulfate de protoxyde qui reste en dissolution. Si l'on chauffe davantage le composé blanc, il se fond, et de l'oxygène se dégage encore, mêlé à de l'acide sulfurique qui distille. Il arrive un moment où la chaleur de la lampe à alcool, plus que suffisante pour maintenir le sel fondu très-fluide, ne produit plus aucun dégagement gazeux. La masse refroidie, solide, très-dense, est du sulfate acide de protoxyde de thallium. Enfin ce dernier sel, chauffé au rouge sur une lampe à courant d'air, abandonne de l'acide sulfurique anhydre, et finalement est ramené à l'état de sulfate neutre de protoxyde.

(1) D'après M. Werther, la décomposition commencerait déjà vers 70 degrés (*Journal für praktische Chemie*, t. XCI, 1864; et *Bulletin de la Société Chimique*, 1864).

Si l'acide sulfurique concentré est sans action à froid sur l'oxyde noir, l'acide chlorhydrique, dans les mêmes circonstances, se combine avec lui et le transforme complètement en chlorure, sans autre dégagement apparent que celui d'une notable quantité de chaleur. En vaporisant l'excès d'acide, on obtient par refroidissement le perchlorure sous la forme d'une masse blanche cristallisée. Une élévation plus grande de température dégage beaucoup de chlore, et produit un composé jaunâtre, semblable au sesquichlorure.

Les sels de peroxyde donnent tous par l'ammoniaque un précipité brun, et avec l'iodure de potassium un précipité rougeâtre formé d'iode et de protoiodure de thallium.

Nous avons fait de nombreuses synthèses de l'oxyde noir pour arriver à sa formule. Malheureusement, les tubes ou les ballons de verre, les creusets de porcelaine dans lesquels on opère, sont attaqués par le protoxyde qui s'unit à la silice et échappe ainsi à une combustion complète. En second lieu, au moment de l'incandescence, il y a toujours une partie d'oxyde brun entraînée par le courant d'oxygène. En troisième lieu, comme il faut détacher des vases l'oxyde fondu et cristallisé pour le pulvériser et le soumettre de nouveau à une suroxydation, les vases se brisent, et dans ces manipulations successives on perd nécessairement de la matière. On ne peut d'ailleurs opérer dans du platine, parce que ce métal est attaqué par le thallium en fusion. Notons enfin que $\frac{1}{2}$ équivalent d'oxygène est à peine $\frac{1}{50}$ de l'équivalent du thallium, et l'on comprendra les difficultés que nous avons rencontrées pour faire la synthèse exacte du peroxyde noir.

Les nombres trouvés indiquaient presque constamment plus de deux proportions et demie d'oxygène pour une de thallium, et, dans tous les cas, il y avait des pertes certaines. Exemples :

I. 3^{gr},415 de thallium ont augmenté de 0^{gr},375.

		Différence.
La composition du trioxyde exige.....	0 ^{gr} ,401	— 0 ^{gr} ,026
» de l'oxyde Tl^2O^3	0 ^{gr} ,335	+ 0 ^{gr} ,040

II. 12^{gr},734 de thallium en feuilles ont augmenté de 1^{gr},420.

		Différence.
La composition de TlO^3 exige.....	1 ^{gr} ,498	— 0 ^{gr} ,078
Celle de l'oxyde Tl^2O^3	1 ^{gr} ,248	+ 0 ^{gr} ,172

Je le répète, dans ces expériences je n'ai pu éviter complètement les pertes. Comme d'ailleurs les nombres obtenus dépassent notablement la proportion d'oxygène nécessaire à l'oxyde Tl^2O^3 , j'ai été conduit à admettre la formule TlO^3 , d'autant plus qu'elle a trouvé, dans les analyses que je vais rapporter, une confirmation remarquable qui me semble de nature à lever toute incertitude.

On a mis un poids connu d'oxyde noir avec un excès d'acide sulfurique concentré dans un petit ballon en verre auquel on a ensuite soudé un tube propre à recueillir les gaz. Le mélange, chauffé avec précaution jusqu'à cessation de tout dégagement gazeux, a fourni les résultats suivants :

1° 3 grammes d'oxyde noir, transformés en sulfate de protoxyde, ont dégagé 150 centimètres cubes d'oxygène à 0 degré. La théorie exigerait 147 centimètres cubes : différence, 3 centimètres cubes. La composition de Tl^2O^3 eût exigé 125 centimètres cubes, et l'écart serait sept fois plus grand que le premier.

2° 1^{er}, 990 d'oxyde noir ont dégagé 96 centimètres cubes d'oxygène à 0 degré, sous la pression 0^m, 76; la même quantité d'oxyde passant de la composition de trioxyde à celle de protoxyde doit abandonner théoriquement 97^{cc}, 2.

CHLORURES DE THALLIUM.

Le thallium peut s'unir au chlore en trois ou quatre proportions.

Protochlorure, $TlCl$. — La plus stable de ces combinaisons est le protochlorure, composé blanc, offrant beaucoup d'analogie avec le chlorure d'argent, soit par la facilité avec laquelle il se sépare en gros et lourds flocons des liqueurs où on vient de le précipiter, soit par son aspect, sa flexibilité, sa translucidité quand il a été fondu. Mais le protochlorure de thallium est un peu soluble dans l'eau, surtout à chaud, de façon qu'on peut l'obtenir aisément à l'état cristallin. Il est moins soluble dans l'eau acidulée par l'acide chlorhydrique ou le chlorure de sodium. 100 grammes d'eau en dissolvent 2 grammes environ à 100°, 8, et un peu moins de $\frac{1}{2}$ gramme à 18 degrés. Il est d'ailleurs insoluble dans l'alcool, fort peu soluble dans l'ammoniaque et inaltérable à la lumière (1). Il est facilement fusible et volatilisable déjà à la température de sa fusion. Enfin il a une densité considérable (7,02) à peine inférieure à celle du protochlorure de mercure, l'un des chlorures métalliques les plus denses.

Le protochlorure peut former avec les chlorures de platine et d'or des chlorures doubles. Nous avons déjà signalé la grande insolubilité du chlorure double de platine et de thallium, comme un bon caractère pour reconnaître les sels de ce dernier métal. Suivant M. Crookes, auquel nous laissons toute la responsabilité de l'assertion, ce sel serait 145 fois plus insoluble dans l'eau que le chlorure double de platine et de potassium.

L'acide nitrique et surtout l'eau régale transforment rapidement le protochlorure de thallium dans le composé suivant.

Sesquichlorure, Tl^2Cl^3 . — Ce sel se présente sous la forme de belles lamelles

(1) Il ne se colore que quand il est mélangé avec du chlorure d'argent dont on n'a pas su le débarrasser.

hexagonales jaunes, d'autant plus foncées en couleur qu'elles se sont produites plus lentement, ou au sein de dissolutions moins acides. Il est soluble dans l'eau, dans la proportion d'environ 4 à 5 pour 100 à la température de l'ébullition. En se dissolvant, il éprouve une très-légère décomposition, d'où résultent la précipitation d'une faible quantité d'oxyde brun et la formation d'un peu de protochlorure. On s'oppose à cette décomposition, et l'on maintient incolore la liqueur, par l'addition de quelques gouttes d'acide chlorhydrique ou nitrique.

Le sesquichlorure fond, entre 400 et 500 degrés, en un liquide brun foncé qui se prend par le refroidissement en une masse compacte, friable, de couleur jaune-brun et dont le retrait, relativement considérable, permet de la détacher aisément des vases de verre ou de porcelaine où on l'a fondue. Sa densité est 5,9.

On prépare le sesquichlorure en dissolvant le thallium dans l'eau régale, chauffant la masse résultante jusqu'à fusion et cessation de tout dégagement de chlore, puis la faisant cristalliser dans l'eau.

On peut encore obtenir le sesquichlorure par l'action directe du chlore sur le thallium ; comme dans la préparation précédente, il est convenable de chauffer un peu la masse pour dégager l'excès de chlore.

J'ai éprouvé quelques difficultés pour déterminer la proportion des éléments constitutifs de ce chlorure, parce que le dosage direct à l'aide du nitrate d'argent ne me donnait pas de résultats satisfaisants. Par différents moyens, je suis pourtant parvenu à cette détermination, dont l'exactitude me paraît aujourd'hui certaine.

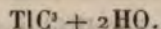
Dans une première manière de procéder, j'ai précipité le sesquichlorure par la potasse, puis dosé, selon la méthode ordinaire, le chlore des chlorures de thallium et de potassium obtenus. Mais il est indispensable pour le succès de l'opération, d'abord d'aciduler la dissolution par quelques gouttes d'acide nitrique, ensuite et surtout d'employer à cette dissolution une quantité d'eau chaude relativement considérable. Sans cette dernière précaution, des lavages à l'eau bouillante continués pendant plusieurs jours ne parviennent pas à débarrasser complètement l'oxyde brun précipité des dernières traces de protochlorure.

Dans un deuxième procédé, j'ai eu recours à l'emploi d'une liqueur titrée d'argent et de phosphate de soude ordinaire.

Enfin, j'ai fait la synthèse du chlorure par l'action directe du chlore sur le thallium. Voici les résultats trouvés :

	Poids du sesquichlorure jaune.	Chlore		Différence.
		trouvé.	calculé.	
I.....	1,000	0,204	0,207	0,003
II.....	5,000	1,033	1,034	0,001
III.....	10,000	2,073	2,068	0,005
IV.....	4,856	1,014	1,004	0,010
12.				

naît en ajoutant du bichlorure de platine, qui ne précipite que le protochlorure de thallium, puis un courant d'acide carbonique pour chasser l'excès de chlore, et qu'on évapore ensuite dans le vide, on obtient une masse cristalline composée de prismes assez volumineux. Ces cristaux retiennent encore de l'eau à 60 degrés, et à cette température ils perdent déjà du chlore; ils ont pour composition



Soumis longtemps à la température de 100 degrés, ce perchlorure se réduit en grande partie, et il reste des chlorures intermédiaires, généralement du sesquichlorure.

Perchlorures doubles de thallium. — Nous avons dit que le sesquichlorure et le perchlorure de thallium, et en général tous les sels de thallium au maximum d'oxydation, donnaient par l'ammoniaque un précipité brun de peroxyde de thallium TlO^3 . En présence des sels ammoniacaux, notamment du chlorhydrate d'ammoniaque, M. Ed. Willm a reconnu que l'ammoniaque ne donnait pas de précipité (1), et cette observation l'a conduit à la découverte d'un perchlorure double, qui a été comme le point de départ de plusieurs composés analogues, dont nous devons la connaissance soit à M. Willm lui-même, soit à M. Nicklès (2).

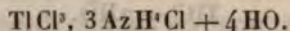
Le peroxyde de thallium se dissout à l'ébullition dans le chlorhydrate d'ammoniaque en dégageant de l'ammoniaque, et l'on obtient par la concentration de la liqueur des cristaux cubiques de sel ammoniac qui ont entraîné avec eux du perchlorure de thallium. Toutefois, la plus grande partie de ce métal reste dans les eaux mères et paraît cristalliser en toutes proportions avec le sel ammoniac, pourvu que celui-ci soit en excès; en sorte qu'il n'est pas possible, par cette première cristallisation, d'obtenir un composé défini; mais la solution concentrée et froide de ces cristaux donne par l'ammoniaque un précipité blanc très-lourd en partie soluble dans la liqueur et décomposable par l'ébullition. Ce précipité, lavé plusieurs fois successivement avec de l'ammoniaque concentrée et de l'alcool absolu, puis séché dans le vide et enfin à 100 degrés, est très-stable à l'air sec, et peut être considéré comme formé de 1 équivalent de trichlorure de thallium avec 3 équivalents d'ammoniaque (*chloramidure*). Il se dissout bien dans l'acide chlorhydrique et donne des cristaux nettement définis de perchlorure double de thallium et de chlorure d'ammonium.

Selon M. Nicklès, on obtient facilement ce chlorure double ou *chlorothallate d'ammonium*, en traitant un éther chlorothallique, que nous décrirons plus loin, par le chlorhydrate d'ammoniaque. Il se produit à la longue de magnifiques tables

(1) *Bulletin de la Société Chimique*; juillet 1863.

(2) *Mémoires de l'Académie de Stanislas de Nancy*; 1864.

à six pans, dérivées d'un prisme rhomboïdal droit. Ces tables sont incolores et parfaitement transparentes; au soleil, elles jaunissent et se couvrent par places de petits points rouges dus à du tritoxyle de thallium; elles sont solubles dans l'eau et dans l'alcool; leur dissolution jaunit en présence des eaux contenant du bicarbonate de chaux. Enfin elles ne sont pas anhydres, et leur composition peut être formulée ainsi :



Des composés analogues sont fournis par le trichlorure de thallium et les autres chlorures alcalins. Leur existence prouve que ce trichlorure, susceptible de se combiner avec 3 équivalents d'un chlorure alcalin, se comporte comme un acide tribasique.

BROMURES DE THALLIUM.

Protobromure, TlBr . — Le protobromure est un composé blanc presque insoluble dans l'eau froide et très-peu soluble dans l'eau bouillante. D'après M. Willm, sa solubilité à froid est intermédiaire entre celle du protochlorure et celle du protoiodure de thallium.

Il existe un *sesquibromure* et un *perbromure* correspondant aux chlorures que j'ai décrits plus haut.

Perbromure, TlBr^3 . — Le perbromure s'obtient en ajoutant du brome à du protobromure de thallium en bouillie épaisse. La masse s'échauffe, et le bromure se dissout peu à peu entièrement dans la petite quantité d'eau en présence de laquelle il se trouve; par le refroidissement la masse reste liquide, et ne se prend en cristaux que par l'évaporation dans le vide. On obtient ainsi un corps cristallin jaune, déliquescent, possédant une odeur très-irritante. Il est formé de perbromure impur, que l'auteur n'a pas réussi à purifier complètement, à cause de son peu de stabilité.

Ce tribromure prend facilement naissance et acquiert de la stabilité lorsqu'on traite le bromure de thallium par de l'éther anhydre et du brome ajouté peu à peu, de manière à éviter une trop grande élévation de température.

Sesquibromure. — Lorsqu'à une solution de perbromure de thallium on ajoute, en quantité convenable, du protobromure du même métal, ou qu'on lui fait subir une réduction incomplète, on obtient un composé beaucoup moins soluble que le perbromure, et qui se dépose de la solution bouillante en longues aiguilles brillantes d'un jaune serin. Ces cristaux sont très-homogènes, anhydres et décomposables par l'eau en perbromure, qui reste dissous, et en un bromure rouge formant des lamelles hexagonales.

Ce composé jaune, d'après l'analyse qui en a été faite, correspond à un bibromure de thallium, mais il peut être considéré comme une combinaison de perbromure et de protobromure de thallium : $\text{TlBr}^3, \text{TlBr}$.

Le corps rouge cristallisé en lamelles hexagonales est du *sesquibromure*, susceptible lui-même de se décomposer lorsqu'on essaye de le faire de nouveau cristalliser dans l'eau.

Le perbromure de thallium forme aussi avec les bromures alcalins des combinaisons doubles parfaitement définies.

Le perbromure double de thallium et d'ammonium, TlBr^3 , AzH^4Br , cristallise en longues aiguilles jaunes, translucides, efflorescentes, et devenant alors opaques. Il renferme 10 équivalents d'eau qu'il perd avec la plus grande facilité par son exposition dans le vide sec.

Un autre bromure double affecte la forme de tables rhomboïdales. Enfin le perbromure double de thallium et de potassium est jaune, inaltérable à l'air, et cristallise avec 4 équivalents d'eau.

Nous avons vu qu'il existait une combinaison ammoniée de perchlorure de thallium; la combinaison correspondante du perbromure a été obtenue par M. Willm en ajoutant à une solution alcoolique concentrée de ce sel une solution alcoolique d'ammoniaque. Le précipité blanc qui se forme (*bromamidure*) jaunit promptement si l'on ne se hâte pas de le laver à l'alcool et de le sécher. Il est instantanément décomposé par l'eau, qui met en liberté du peroxyde de thallium anhydre.

IODURES DE THALLIUM.

Protoiodure, TlI . — L'iodure de thallium préparé par double décomposition a une couleur jaune, un peu plus pâle que celle de l'iodure de plomb. Il est très-peu soluble dans l'eau, où il peut cependant cristalliser sous la forme de cristaux microscopiques de couleur orange. M. Werther a trouvé qu'une partie de cet iodure exige, pour se dissoudre, 20 000 parties d'eau à $13^{\circ},5$ et 5400 à 45° degrés. Il est insoluble dans l'alcool absolu, dans les iodures alcalins et dans l'hyposulfite de soude; mais il se dissout en quantité notable dans la potasse caustique bouillante et dans les acétates alcalins en présence d'un excès d'acide acétique.

Le *periodure* n'a pu encore être obtenu dans un état de pureté qui corresponde à la formule TlI^3 ; par l'iode qu'il contient en excès, il bleuit rapidement le papier amidonné. Cela ne l'empêche pas de prendre une forme cristalline bien définie, dérivant d'un prisme droit rhomboïdal. Abandonné à l'air et à la lumière, il jaunit peu à peu en perdant de l'iode, tout en conservant sa forme prismatique (Nicklès).

Periodure double de thallium et de potassium, TlI^3 , KI . — M. Willm a obtenu ce composé en traitant le protoiodure de thallium par une solution d'iodure ioduré de potassium, prise en quantité telle, qu'elle contienne 2 équivalents d'iode libre pour 1 d'iodure de thallium. La solution alcoolique, soumise à l'évaporation, abandonne des cristaux assez volumineux, presque noirs et d'un rouge grenat par transparence, mais assez peu stables pour qu'une température de 50 à 60 degrés suffise à les

décomposer, en mettant de l'iode en liberté. L'eau produit une décomposition analogue.

Iodure double de thallium et d'ammonium, TlI^3 , AzH^1I . — Ce composé, obtenu par M. Nicklès, cristallise en tables rouges rhomboïdales paraissant isomorphes avec le periodure double précédent : il ne fond pas à chaud, mais noircit d'abord pour jaunir ensuite en perdant non-seulement de l'eau, mais encore assez d'iode pour que le periodure soit ramené à l'état de protoiodure.

Caractères généraux des composés précédents. — Nous venons de voir que le perchlorure, le perbromure et le periodure se comportent comme des acides en s'unissant avec des chlorures alcalins pour former de véritables sels doubles, cristallisables et bien définis. En appelant ces sortes de sels *halothallates* alcalins, on peut résumer ainsi qu'il suit, avec M. Nicklès, leurs caractères généraux.

Les halothallates alcalins, tels que les chloro, bromo et iodothallates, sont solubles dans l'eau, et le plus souvent aussi dans l'alcool. Les uns, tels que les chlorothallates, sont altérables à la lumière du soleil ; l'altération se fait dans ce sens qu'une certaine quantité de TlCl^3 se transforme en oxyde brun, TlO^3 . Les autres, tels que les iodothallates, sont décomposables à une température même inférieure à 100 degrés ; ils perdent alors assez d'iode pour que TlI^3 se réduise à TlI , ce qui constitue même un moyen de dosage.

Les chlorothallates non altérés sont incolores. Les bromothallates sont jaunes. Les iodothallates sont rouges ou bruns.

L'ammoniaque, la potasse et la soude en séparent le thallium à l'état d'oxyde brun, TlO^3 . Toutefois, la première est sans action lorsqu'il y a un excès de sel ammoniac en présence.

Les carbonates alcalins, ainsi que les bicarbonates alcalino-terreux, se comportent comme les alcalis fixes et précipitent comme eux les sels en question. Ce caractère est d'une sensibilité telle, qu'il suffit de verser une goutte de la dissolution d'un chloro ou d'un bromothallate dans l'eau pour obtenir un précipité, ou tout au moins une coloration jaune très-visible.

L'azotate de bismuth précipite en blanc les nouveaux sels ; le précipité est également soluble dans le sel ammoniac.

FLUORURES DE THALLIUM (1).

L'acide fluorhydrique gazeux, en agissant sur le carbonate de thallium, le convertit en fluorure volatil, qui se présente sous la forme d'une masse cristalline d'un

(1) WERTHER, *Journal für praktische Chemie*, t. XCII ; 1864. — NICKLÈS, *Revue des Sociétés savantes*, t. V ; 1864. — KUHLMANN, *Comptes rendus*, t. LVIII ; 1864.

bleu satiné très-éclatant et noircissant à la lumière comme le chlorure d'argent. L'analyse a donné pour sa composition la formule TlFl (Fréd. Kuhlmann).

L'acide fluorhydrique liquide attaque lentement le thallium à froid, plus facilement à chaud, et donne par refroidissement un *fluorhydrate de fluorure de thallium*, dont la composition est HFl , $\text{TlFl} + 2\text{HO}$, et qui cristallise dans le système cubique.

On obtient aussi le fluorure de thallium hydraté par l'action de l'acide fluorhydrique liquide sur le carbonate de thallium. Les cristaux de ce sel sont blancs, ne noircissent pas à la lumière et paraissent dériver d'un prisme rhomboïdal oblique. Ils sont solubles dans l'eau; mais la dissolution se décompose lentement à l'air et donne lieu à un dégagement d'acide fluorhydrique qui attaque le verre.

Fluorure double de silicium et de thallium. — En faisant agir l'acide fluosilicique sur le carbonate de thallium, on obtient un fluosilicate de thallium sous la forme de tables hexagonales appartenant au système régulier. D'après M. Kuhlmann, ce sel a pour composition $\text{TlSiFl}^2 + 2\text{HO}$. Comme le fluorure simple, le fluorure double est très-soluble dans l'eau. Sa dissolution a une réaction acide et elle laisse déposer lentement un peu de silice. D'ailleurs il n'attaque le verre qu'à la longue et distille sans décomposition.

MONOSULFURE DE THALLIUM.

C'est le plus insoluble des composés de thallium que j'ai étudiés; mais il s'altère au contact de l'air. Lorsqu'en effet on filtre sans précautions une liqueur dans laquelle on vient de le précipiter, elle passe colorée. Une partie de ce composé se transforme en sulfate, lequel, en tombant dans le liquide qui renferme un excès de sulfure alcalin, régénère du sulfure de thallium brun foncé.

Ce sulfure se transforme encore en sulfate, on pouvait s'y attendre, quand on essaye de le dessécher à 100 degrés. Il augmente de poids d'autant plus qu'il reste plus longtemps dans l'étuve. A 140 degrés même, il détermine la combustion du filtre. On peut à la vérité ne pas l'altérer en le desséchant dans l'hydrogène, mais lorsqu'on le sort de ce milieu pour le porter à la balance et constater les progrès ou la fin de la dessiccation, on trouve qu'il augmente encore de poids. Ces difficultés nous ont fait renoncer au dosage direct du thallium par le sulfure.

Convenablement séché, le sulfure de thallium fond difficilement dans des tubes de verre chauffés avec une lampe à esprit-de-vin. La masse refroidie présente une structure cristalline à larges facettes. Elle pèse 8 fois autant que l'eau.

SÉLÉNIURE DE THALLIUM.

J'ai déjà signalé ce composé tel que je l'ai préparé par voie sèche. On l'obtient, par voie humide, sous la forme de lames brillantes grisâtres, en faisant passer un

courant d'acide sélénhydrique dans une dissolution de carbonate de thallium. Suivant M. Kuhlmann fils, ce composé se rapproche par ses propriétés du sélénure de fer, et fond à 340 degrés.

PHOSPHURE DE THALLIUM.

Du thallium projeté dans du phosphore bouillant n'est attaqué par ce corps qu'à peine superficiellement. Mais si l'on projette au contraire du phosphore sur du thallium en fusion, la combinaison des deux éléments se fait avec développement de lumière. Le phosphure résultant est insoluble dans l'eau, et ne dégage pas d'hydrogène phosphoré par son contact avec elle à 100 degrés, même avec le secours d'un acide. Il fond à une température supérieure à 300 degrés.

CARBONATE DE THALLIUM, Tl_2O, CO_2 .

Nous avons dit qu'au contact de l'air une dissolution de protoxyde se transformait peu à peu en carbonate. On active et on complète cette transformation par un courant de gaz carbonique, convenablement lavé. Ensuite on évapore la dissolution à moitié, et on l'abandonne au refroidissement pour cristalliser.

Les cristaux obtenus ont la forme de longues aiguilles prismatiques, aplaties, très-friables, le plus ordinairement colorées en gris jaunâtre, mais qui sont blanches quand elles proviennent des eaux mères, ou quand elles se sont produites dans un mélange convenable d'alcool et d'eau. Les cristaux, qui prennent naissance dans ce mélange, présentent une forme en apparence différente des premiers; ils ressemblent à de petites lamelles irisées qui ne sont pour la plupart que des losanges imparfaits et tronqués sur les angles. Des traces d'acide ou plutôt de chlorure modifient de la même manière la forme cristalline du carbonate.

Lorsqu'il a été séché à 100 degrés, le carbonate de thallium ne contient pas d'eau. Il fond facilement en une masse grise vers 260 degrés, puis se décompose en abandonnant de l'acide carbonique, si l'action de la chaleur n'est pas convenablement ménagée. Les creusets de porcelaine ou les tubes de verre dans lesquels on le chauffe sont toujours attaqués par l'oxyde jaune qui résulte de la décomposition. La densité du carbonate fondu est 7,06 (1). Il est insoluble dans l'alcool absolu; aussi de l'alcool versé dans une dissolution de ce sel donne immédiatement un précipité blanc.

La solubilité du carbonate dans l'eau, à laquelle il communique une réaction

(1) Nous ferons observer une fois pour toutes que les densités des sels de thallium, carbonate, sulfate, nitrate et chlorure ou sulfure, ont été prises sur ces composés après leur fusion, et directement avec l'alcool absolu, dans lequel ils sont à peu près complètement insolubles.

alcaline, est représentée par les nombres suivants :

A	18°,0,	100 grammes d'eau dissolvent	5,23	de sel anhydre.
A	62°,0,	»	12,85	»
A	100°,8,	»	22,40	»

M. Crookes, qui a répété nos expériences (1), a trouvé des nombres à peu près identiques aux nôtres pour le degré de solubilité à la température ordinaire ; mais la proportion 27 pour 100 de sel à 100 degrés, qu'il donne, est trop différente des 22 pour 100 du tableau précédent pour qu'il n'y ait pas erreur d'un côté ou de l'autre. Nous avons donc fait une nouvelle détermination de la solubilité du carbonate à 100 degrés, en suivant exactement la méthode de Gay-Lussac (comme nous l'avions toujours fait d'ailleurs) telle qu'elle est décrite dans la *Chimie* de M. Regnault. Voici les nombres que nous avons obtenus :

Poids d'eau.....	78,547, ci....	100,00	} à 18 degrés.
Carbonate dissous.....	3,869	4,93	
Poids d'eau.....	72,093	100,00	} à l'ébullition.
Carbonate dissous.....	15,560	21,6	

Ces résultats étant très-sensiblement d'accord avec les premiers, nous concluons que la solubilité du carbonate de thallium est bien représentée par 22 pour 100, nombre rond, à 100 degrés.

BORATE DE THALLIUM.

L'acide borique ajouté à une dissolution de carbonate de thallium ou du borax versé dans du sulfate de thallium précipitent un borate de thallium blanc granuleux, insoluble dans un excès du précipitant et dans l'acide sulfurique dilué et froid, mais soluble dans l'eau bouillante (Crookes).

SILICATES DE THALLIUM.

La silice peut se combiner en plusieurs proportions avec l'oxyde de thallium, et donner naissance à des silicates transparents ou peu colorés. Le même oxyde peut remplacer le minium ou la potasse dans la composition du cristal, et produire des composés intéressants qui font en ce moment l'objet de nos études, et pour lesquels nous avons déjà pris date par une communication à la Société impériale des Sciences de Lille.

(1) Voir *Chemical News*, depuis juin 1863 jusqu'à janvier (inclus) 1864.

SULFATES DE THALLIUM.

Sulfate de protoxyde, TlO, SO^3 . — L'acide sulfurique dissout aisément le thallium avec le concours de la chaleur. Le sulfate produit cristallise en beaux prismes incolores, qui ressemblent à s'y méprendre à des prismes rhomboïdaux obliques. Mais un examen approfondi et surtout la mesure des angles, comme l'a reconnu M. Pasteur, prouvent qu'ils appartiennent au système du prisme rhomboïdal droit; de plus, que l'angle des pans est très-voisin de l'angle des faces correspondantes du prisme rhomboïdal droit du sulfate de potasse.

D'après M. de Lang (1), l'isomorphisme des deux sulfates serait complet, les axes du sulfate de thallium étant

$$a : b : c = 1 : 0,7319 : 0,5539,$$

et ceux du sulfate de potasse

$$a : b : c = 1 : 0,7464 : 0,5727.$$

L'orientation des axes optiques n'est pas celle des axes correspondants dans les cristaux de sulfate de potasse, mais bien celle que l'on rencontre dans les cristaux de sulfate d'ammoniaque.

Comme le sulfate de potasse, le sulfate de thallium ne renferme pas d'eau de combinaison. Comme lui enfin, il décrépité quand on le chauffe, fond à une température voisine du rouge, sans se décomposer, mais en se volatilisant partiellement, et se prend par le refroidissement en une masse vitreuse transparente et incolore. A cet état sa densité est 6,77.

Le sulfate de thallium est un peu moins soluble dans l'eau que le carbonate : 100 grammes de ce liquide à 101° , 2 dissolvent $19^{\text{gr}}, 15$ de sulfate sec et anhydre; $11^{\text{gr}}, 5$ à 60 degrés, et $4^{\text{gr}}, 8$ à 18 degrés. La dissolution est neutre aux papiers réactifs.

On prépare le sulfate en décomposant le protochlorure de thallium par l'acide sulfurique, ainsi que nous l'avons dit au paragraphe de l'extraction du thallium, ou bien par l'action directe de cet acide sur le métal.

Nous avons signalé l'existence d'un *sulfate acide* et d'un *sulfate de trioxyde de thallium*, en faisant connaître les propriétés de l'oxyde supérieur (p. 86 et suiv.). Le sulfate de peroxyde donne un précipité brun avec les alcalis.

Alun de thallium, $\text{TlO}, \text{SO}^3 + \text{Al}^3\text{O}^3, 3\text{SO}^3 + 24\text{HO}$. — En mélangeant du sul-

(1) *Annales de Poggendorff*, t. CXVIII; 1863. — *Bulletin de la Société Chimique*; 1863.

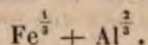
fate de thallium avec du sulfate d'alumine équivalent pour équivalent, j'ai obtenu, par cristallisation, de magnifiques octaèdres d'alun de thallium incolores et brillants, qui offrent cette particularité remarquable, d'après les mesures de M. Pasteur, que l'angle de leurs faces est rigoureusement égal à celui de l'octaèdre régulier de l'alun de potasse.

La plupart des autres propriétés de cet alun sont d'ailleurs semblables à celles de l'alun de potasse. Ainsi il cristallise avec 24 équivalents d'eau; exposé à l'air, il s'effleurit lentement; soumis à la température de 100 degrés, il fond dans son eau de cristallisation et conserve encore sa transparence après le refroidissement. Sous l'influence d'une chaleur plus forte, il perd son eau, se boursoufle et forme une masse volumineuse et opaque ressemblant tout à fait à l'alun de potasse calciné.

L'existence de ce sulfate double de thallium a conduit plusieurs chimistes à rechercher des combinaisons analogues.

Alun de fer et de thallium, Fe^2O^3 , $3\text{SO}^3 + \text{TlO}$, $\text{SO}^3 + 24\text{HO}$. — M. Nicklès (1) a obtenu cet alun sous la forme de beaux octaèdres de couleur améthyste, rappelant l'alun à base de fer et de potasse. Ces cristaux sont très-solubles dans l'eau, fondent dans leur eau de cristallisation à une température même inférieure à 100 degrés, et se prennent ensuite en un enduit vitré, très-friable, après avoir perdu 30 pour 100 de leur poids.

Lorsqu'il y a de l'alumine en présence, les cristaux contiennent toujours une certaine portion de cet oxyde qui remplace alors, isomorphiquement, une quantité équivalente de sesquioxyle de fer. C'est ainsi qu'on obtient des octaèdres d'alun contenant $\text{Al}^{\frac{1}{3}} + \text{Fe}^{\frac{2}{3}}$, et d'autres qui renferment ces métaux dans un rapport inverse, c'est-à-dire



M. Willm (2), puis M. Werther (3), ont préparé des sulfates doubles de protoxyde de thallium avec les oxydes de la série magnésienne.

Ceux de ces sels qui s'obtiennent le plus facilement, d'après M. Werther, sont les sulfates doubles formés par le zinc et le nickel.

Sulfate double de thallium et de nickel, NiO , $\text{SO}^3 + \text{TlO}$, $\text{SO}^3 + 6\text{HO}$. — Ce sel forme des cristaux verts, opaques, présentant des faces très-brillantes: ils perdent leur eau à 120 degrés, mais sont inaltérables à l'air; ils fondent vers 300 degrés. Leur forme cristalline est celle d'un prisme rhomboïdal de $109^{\circ}6'$, la base faisant avec les faces du prisme un angle de $76^{\circ}30'$.

(1) NICKLÈS, *Journal de Pharmacie*; janvier 1864.

(2) WILLM, *Société Chimique de Paris*; mars 1864.

(3) WERTHER, *Journal für praktische Chemie*, t. XCII, n° 14; 1864.

Sulfate double de zinc et de thallium, $\text{ZnO}, \text{SO}^3 + \text{TlO}, \text{SO}^3 + 6\text{HO}$. — Ce sel ressemble, sauf la couleur, au précédent, avec lequel il est isomorphe.

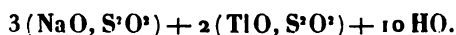
Sulfate double de thallium et de protoxyde de fer, $\text{FeO}, \text{SO}^3 + \text{TlO}, \text{SO}^3 + 6\text{HO}$. — Les cristaux de ce sel sont d'un vert clair; ils ne fondent pas, mais se décomposent sous l'action de la chaleur; ils sont isomorphes avec les précédents et avec le *sulfate double de thallium et de magnésie*, $\text{MgO}, \text{SO}^3 + \text{TlO}, \text{SO}^3 + 6\text{HO}$.

L'existence de tous ces composés doubles, établissant l'isomorphisme du potassium et du thallium, est un puissant argument en faveur de l'opinion qui fait du second un métal alcalin comme le premier.

HYPOSULFITES DE THALLIUM.

Hyposulfite, $\text{TlO}, \text{S}^2\text{O}^3$. — Ce sel se précipite sous la forme d'un corps blanc quand on verse de l'hyposulfite de soude dans une dissolution de sulfate de thallium. Néanmoins, il est sensiblement soluble dans l'eau bouillante et peut être obtenu en cristaux tabulaires qui paraissent isomorphes avec l'hyposulfite de potasse, mais qui sont hémimorphes et hémédriques, d'après M. Werther. Sous l'action d'une température élevée, ils se décomposent en abandonnant de l'acide sulfureux et en laissant pour résidu un sulfure de thallium cristallisé par fusion.

M. Werther a préparé encore l'hyposulfate et un *hyposulfite double de thallium et de sodium*. Ce dernier cristallise en longues aiguilles et a pour composition



SÉLÉNATES DE THALLIUM.

Le séléniate, le sélénite et le bisélénite de thallium ont été étudiés par M. Kuhlmann fils (1).

Le séléniate prend naissance quand on sature le carbonate de thallium avec l'acide sélénique pur. Il se dépose de sa dissolution neutre ou faiblement acide, en belles et longues aiguilles blanches, qui paraissent isomorphes avec les cristaux de sulfate de thallium et de potasse. Peu soluble dans l'eau froide, insoluble dans l'alcool et dans l'éther, ce sel se rapproche encore, sous ce rapport, des sulfates et sélénates alcalins.

Séléniate double de zinc et de thallium, $\text{ZnO}, \text{SeO}^3 + \text{TlO}, \text{SeO}^3 + 6\text{HO}$. — Ce sel, préparé par M. Werther, ressemble au sulfate correspondant et cristallise dans le même système.

(1) *Bulletin de la Société Chimique de Paris*; mai 1864.

SÉLÉNITES DE THALLIUM.

Le sélénure de thallium traité par l'acide azotique se transforme en sélénite. Le même sel s'obtient plus aisément en saturant une dissolution d'acide sélénieux avec un excès de carbonate de thallium. Si la dissolution est assez concentrée, le sel TlO , SeO^2 se dépose en lames brillantes, micacées, très-fines.

Assez soluble dans l'eau, le sélénite est précipité de ses dissolutions par l'alcool et l'éther. Il a une réaction alcaline et fond à une température peu élevée.

Un excès d'acide sélénieux, ajouté à une dissolution de carbonate de thallium, donne naissance à un sel plus soluble que le précédent, mais insoluble comme lui dans l'alcool et l'éther : c'est le bisélénite de thallium TlO , $(\text{SeO}^2)^2$, HO .

On ne peut l'obtenir à l'état cristallin qu'avec des dissolutions aqueuses extrêmement concentrées ou mélangées d'alcool.

AZOTATE DE PROTOXYDE DE THALLIUM, TlO , AzO^2 .

Le nitrate de thallium est le plus soluble des sels que nous avons étudiés. A la température de 18 degrés, 100 parties d'eau dissolvent 9,75 de sel; à 58 degrés, elles en dissolvent 43,7, et 580 parties à 107 degrés. Comme on le voit, la courbe de solubilité augmente très-rapidement avec la température.

En constatant que 22^{gr},074 de nitrate se dissolvaient à 107 degrés dans 3^{gr},8 d'eau, nous avons d'abord supposé que cette eau pourrait être de l'eau de combinaison, représentant exactement 5 équivalents. Mais le sel cristallisé et desséché sous le récipient de la machine pneumatique, à la température ordinaire, abandonne cette eau tout aussi complètement que dans une étuve à 100 degrés. La formule du nitrate peut donc être représentée par TlO , AzO^2 .

Le nitrate est insoluble dans l'alcool absolu. Dans l'eau pure, il cristallise en faisceaux d'aiguilles prismatiques d'un beau blanc mat, et peut fondre en une masse vitreuse tout à fait transparente. Sa densité est 5,8.

On le prépare en attaquant directement le thallium par l'acide nitrique, ou en décomposant par cet acide le carbonate du métal.

PHOSPHATES DE THALLIUM.

Dans mon second Mémoire sur le thallium (1), j'avais dit que ce métal formait avec l'acide phosphorique un phosphatesoluble, comme le carbonate, et, par cette propriété, se rapprochait encore des métaux alcalins. M. Crookes, qui a

(1) *Annales de la Société impériale des Sciences de Lille*; vol. IX, 2^e série, 1862; et *Annales de Chimie et de Physique*, t. LXVII.

répété une partie de mes expériences (1), a contesté l'exactitude de ce fait, en prétendant que le phosphate de thallium était insoluble ou du moins très-peu soluble (moins de $\frac{1}{2}$ pour 100). Quoique parfaitement sûr d'avoir obtenu et de posséder encore un phosphate soluble, j'ai cru néanmoins devoir reprendre l'étude de ce corps, en variant les conditions de sa préparation; et les recherches auxquelles je me suis livré ont non-seulement confirmé mes premières indications, mais m'ont conduit à des résultats intéressants que je vais faire connaître.

Le thallium forme avec l'acide phosphorique, non pas un, mais plusieurs phosphates, la plupart très-solubles et pour le moins aussi variés dans leur composition et leurs propriétés que les composés correspondants des métaux alcalins.

J'ai en effet obtenu :

Un phosphate neutre hydraté.....	$\text{PhO}^3, 2\text{TlO}, \text{HO} + \text{HO}.$
Un autre phosphate neutre anhydre...	$\text{PhO}^3, 2\text{TlO}, \text{HO}.$
Un phosphate acide.....	$\text{PhO}^3, \text{TlO}, 2\text{HO}.$
Un phosphate basique.....	$\text{PhO}^3, 3\text{TlO}.$
Un pyrophosphate neutre.....	$\text{PhO}^3, 2\text{TlO}.$
Un pyrophosphate acide.....	$\text{PhO}^3, \text{TlO}, \text{HO}.$
Enfin un métaphosphate.....	$\text{PhO}^3, \text{TlO}.$

Caractères généraux. — Tous ces sels sont blancs, la plupart très-solubles, et peuvent être obtenus plus ou moins facilement à l'état cristallin. Ils se distinguent aisément des phosphates des autres métaux alcalins. D'abord, à cause de l'insolubilité du chlorure de thallium, ils précipitent tous en blanc par l'acide chlorhydrique. Ensuite, chose curieuse, tous, excepté le métaphosphate, précipitent en blanc par l'acide azotique, pourvu que leurs dissolutions ne soient ni chaudes ni trop étendues. Le précipité se dissout aisément à chaud et cristallise par refroidissement de la liqueur, en présentant les caractères du nitrate de thallium. Enfin les phosphates et les pyrophosphates de thallium donnent avec les alcalis un précipité blanc de phosphate basique très-peu soluble, tandis qu'ils ne précipitent pas par les carbonates alcalins, ni même par les alcalis en présence de ces carbonates.

Phosphate de thallium neutre, $\text{PhO}^3, \text{TlO}, \text{HO} + \text{HO}$. — On obtient ce composé en saturant, à la température de l'ébullition, de l'acide phosphorique ordinaire par du carbonate de thallium.

C'est ce sel que j'avais préparé il y a deux ans et demi, et dont il est question dans le Mémoire cité plus haut. Il est tellement soluble, que sa dissolution peut être amenée à l'état de consistance sirupeuse avant de cristalliser, et qu'il n'est pas facile d'en obtenir des cristaux bien nets et isolés. Il a une réaction alcaline,

(1) *Mémoires de la Société Chimique de Londres*, vol. II, 2^e série.

comme le phosphate de soude ordinaire. Mais il ne contient qu'un seul équivalent d'eau de cristallisation, lorsqu'il a été desséché à 120 degrés et même fondu à 145 degrés. Vers 170 degrés, il se boursoufle et commence à perdre visiblement cette eau. Une température supérieure, voisine du rouge sombre, lui fait perdre en outre un second équivalent, que l'on doit considérer comme eau de constitution, pour le transformer en une masse vitreuse transparente, très-réfringente, de pyrophosphate de thallium.

Le phosphate neutre de thallium ne coagule pas l'albumine, précipite le nitrate d'argent en jaune, et la liqueur, d'alcaline qu'elle était, est devenue franchement acide. Je dois faire observer toutefois que le précipité n'est bien jaune qu'à la condition de verser un excès de nitrate d'argent.

Enfin une réaction qui m'a paru intéressante est celle qui produit l'acide nitrique, qui précipite en blanc la dissolution de phosphate, pourvu qu'elle soit froide et un peu concentrée.

Le précipité, lavé et redissous dans l'eau chaude, offre les caractères du nitrate de thallium. Dans ces circonstances, il ne se produirait donc pas un composé analogue au nitrophosphate de plomb décrit par Gerhardt (*Annales de Chimie et de Physique*, t. XXII, 3^e série, p. 505).

Les réactions obtenues avec le nitrate d'argent indiquaient bien que dans le phosphate direct de thallium, l'acide phosphorique devait être uni à 2 équivalents d'oxyde de thallium et 1 équivalent d'eau de constitution, de la même manière que dans le phosphate de soude ordinaire; mais elles ne faisaient pas connaître le nombre d'équivalents d'eau de cristallisation. Les déterminations suivantes ne peuvent laisser de doute sur la formule donnée plus haut.

	Poids du sel.	Eau trouvée.	Eau calculée.	Différence.
	gr	gr	gr	gr
I.....	6,293	0,227	0,220	+ 0,007
II.....	4,645	0,165	0,162	+ 0,003
III.....	8,985	0,313	0,314	— 0,001

Phosphate neutre anhydre, PhO^5 , 2TlO , HO . — Quelles que soient les précautions que j'ai prises pour saturer parfaitement l'acide phosphorique au moyen d'un excès de carbonate de thallium, par une ébullition plus ou moins soutenue, toujours il s'est produit, au sein de la dissolution de phosphate convenablement concentrée, des cristaux qui ne pouvaient plus se redissoudre dans une quantité d'eau relativement considérable. Ces cristaux diffèrent des cristaux solubles qui se forment plus tard dans la même liqueur, par 1 équivalent d'eau de cristallisation. En effet, en les desséchant parfaitement à 120 degrés, on a obtenu les résultats très-précis suivants :

	Poids du sel PhO ⁵ , 2TlO, HO	Eau trouvée.	Eau calculée.	Différence.
	gr	gr	gr	gr
I.....	1,242	0,020	0,022	— 0,002
II.....	3,705	0,065	0,066	— 0,001
III.....	4,115	0,071	0,071	0,001

Ce phosphate possède d'ailleurs les mêmes propriétés chimiques que le phosphate hydraté, mais il est notablement moins fusible, et surtout moins soluble, comme je l'ai dit. En effet, bouilli avec une quantité d'eau relativement considérable, il perd sa transparence et ne se dissout qu'en proportion minime. Au rouge sombre, il abandonne son eau de constitution et se transforme en un pyrophosphate qui, par le refroidissement, se prend en une masse opaque et non vitreuse, comme le pyrophosphate venant du phosphate hydraté.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer qu'en perdant son eau de cristallisation, le phosphate ordinaire perd en même temps sa solubilité. Une semblable propriété a été déjà signalée par nous dans le protoxyde de thallium, lequel devient aussi très-peu soluble en se déshydratant.

Phosphate acide de thallium, PhO⁵, TlO, 2HO. — En ajoutant à l'une des deux variétés du sel précédent de l'acide phosphorique ordinaire jusqu'à ce que la réaction soit franchement acide, on donne naissance au phosphate acide de thallium. Ce sel est très-soluble et cristallise avec la plus grande facilité en belles lames d'un éclat nacré. Desséchés sous le récipient de la machine pneumatique en présence d'acide sulfurique concentré, ou dans une étuve à 100 degrés, ces cristaux renferment 2 équivalents d'eau de constitution, sans eau de cristallisation. En effet :

1° 2 ^{gr} ,517	du sel sec ont perdu au rouge sombre..	0 ^{gr} ,147
2° 5 ^{gr} ,000	» » »	0 ^{gr} ,296

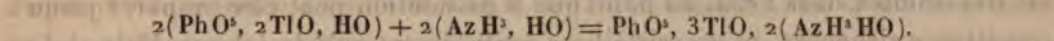
tandis que la composition de PhO⁵, TlO, 2HO, exige pour pertes théoriques 0^{gr},150 et 0^{gr},292.

Dans le verre, la calcination présente quelques difficultés, parce que, vers la fin de l'opération, il faut chauffer au rouge sombre et que le verre est attaqué par le phosphate en fusion. On évite cet inconvénient en se servant d'un creuset de porcelaine ou de platine.

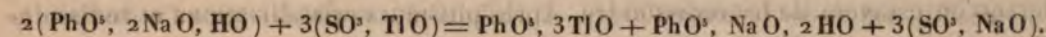
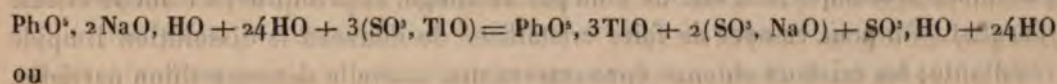
Le phosphate acide de thallium a une réaction légèrement acide. Il est très-soluble dans l'eau et insoluble dans l'acool, comme le phosphate de soude correspondant. Il fond à 190 degrés environ, et commence à se décomposer en se boursoufflant vers 210 degrés. En maintenant une douzaine de grammes pendant deux heures à une température voisine de 240 degrés, j'ai pu éliminer 1 équivalent d'eau seulement et obtenir un corps visqueux, très-soluble, qui a offert les réactions caractéristiques du pyrophosphate acide de thallium.

Enfin, une chaleur rouge, en chassant toute l'eau du phosphate acide, le transforme en une masse blanche, opaque, extrêmement peu soluble dans l'eau et qui, par ses réactions sur l'albumine et le nitrate d'argent, n'est autre chose que du métaphosphate $\text{PhO}^5, \text{TlO} (1)$.

Phosphate basique, $\text{PhO}^5, 3\text{TlO}$. — Ce sel peut être obtenu, soit en mélangeant deux dissolutions saturées de phosphate ordinaire de soude et de sulfate de thallium, soit, plus facilement, en versant un alcali, de l'ammoniaque par exemple, dans l'un des phosphates précédents. Dans les deux cas, le phosphate obtenu par précipitation est blanc, cristallin, d'un aspect généralement soyeux. La réaction qui convient au deuxième paraît devoir être formulée ainsi :



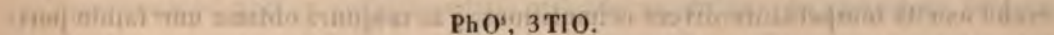
Mais celle qui s'applique au premier n'est pas aussi simple qu'on pourrait le croire *à priori*, telle par exemple que :



Car la liqueur, où s'est faite la précipitation du phosphate insoluble de thallium, n'est nullement acide, mais reste plutôt alcaline. En outre, la proportion de phosphate qui se précipite n'est que le tiers environ de la quantité indiquée par la seconde formule. Il y a, non-seulement du phosphate basique qui se dépose, mais il se produit d'autres phosphates, et très-probablement des phosphates doubles de sodium et de thallium.

Le phosphate basique est anhydre et ne fond qu'au rouge sombre. Fondu, il a l'aspect d'un liquide jaune-rougeâtre, lequel en se refroidissant passe au jaune, et finalement se prend en une masse cristalline blanche, dont la densité est 6,88 à 10 degrés.

Il est très-peu soluble, même dans l'eau bouillante. Sa dissolution présente une réaction alcaline et donne, avec le nitrate d'argent, un faible précipité blanc-jaunâtre, qui devient complètement jaune quand on fait bouillir le mélange des deux sels. Sa composition, déduite des réactions qu'il nous a présentées, doit être



A l'appui de cette opinion, nous dirons que nous avons obtenu directement ce

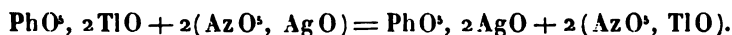
(1) Dans la décomposition de la plupart des phosphates par la chaleur, au contact de l'air en vase ouvert, il se produit constamment un peu de matière noire, laquelle ne m'a paru être que du trioxyde de thallium.

phosphate basique en fondant ensemble, jusqu'à cessation de dégagement gazeux, 1 équivalent de métaphosphate PhO^3 , TlO , et 2 équivalents de carbonate de thallium. La masse fondue, du poids d'une trentaine de grammes environ, a cristallisé avec une telle facilité, qu'en décantant l'excès de liquide vers le commencement de la solidification, on a obtenu une belle géode renfermant des aiguilles de 1 à 2 centimètres de longueur.

Pyrophosphate neutre de thallium, PhO^3 , 2TlO . — En chauffant à une température voisine du rouge le phosphate neutre hydraté de thallium, on obtient, avons-nous dit, après le dégagement de toute l'eau une masse vitreuse, transparente, qui présente les réactions caractéristiques des pyrophosphates. Cette masse est très-soluble dans l'eau, au point que la dissolution peut être évaporée jusqu'à consistance sirupeuse, et ne cristalliser confusément qu'à la longue. Mais si l'on reprend ces cristaux par l'eau, après avoir séparé l'eau mère, ils se décomposent partiellement en abandonnant une matière blanche qui ne paraît pas être du phosphate tribasique; car elle ne fond pas au rouge, et précipite en blanc le nitrate d'argent. On peut essayer de faire cristalliser de nouveau la dissolution limpide résultante; les cristaux obtenus éprouveront une nouvelle décomposition partielle, lorsqu'on essayera de les redissoudre. Après plusieurs cristallisations et redissolutions successives, la liqueur finale ne précipite plus franchement en blanc; une coloration un peu jaunâtre indique qu'il s'est produit un phosphate tribasique soluble.

Le pyrophosphate qu'on obtient en fondant au rouge le phosphate neutre anhydre, PhO^3 , 2TlO , HO , ne présente plus, ni le même aspect, ni tout à fait les mêmes caractères. Il est opaque et d'une structure cristalline (1). Comme le précédent, il éprouve une faible décomposition partielle en se dissolvant dans l'eau; mais il en diffère essentiellement par la facilité avec laquelle il cristallise sous la forme de très-beaux prismes transparents paraissant appartenir au système irrégulier.

Ces cristaux ne se dissolvent pas non plus sans éprouver une très-légère décomposition partielle. Ils précipitent en blanc par le nitrate d'argent, et la liqueur surnageante est parfaitement neutre, conformément à l'équation



Le pyrophosphate retient un peu d'eau à 100 degrés; car après avoir bien desséché à cette température divers échantillons, j'ai toujours obtenu une faible perte à la calcination. Seulement cette perte est loin de représenter 1 équivalent. Ainsi 7 grammes de cristaux choisis, parfaitement limpides, puis pulvérisés et séchés à

(1) J'ai lieu de croire qu'il ne diffère du précédent que parce qu'il ne contient aucun excès d'acide phosphorique.

l'étuve d'eau bouillante jusqu'à ce qu'ils ne perdissent plus de leur poids, ont abandonné à la calcination $0^{\text{sr}},015$, soit 10 fois moins d'eau que la quantité théorique exigée pour représenter 1 équivalent.

Ce sel a cristallisé par le refroidissement en une belle masse blanche, à reflets nacrés, et a pu se dissoudre tout entier dans 15 grammes d'eau. La dissolution était à peine alcaline. Elle précipitait en blanc par le nitrate d'argent, et le liquide surnageant restait neutre.

Pyrophosphate acide, PhO^3 , TlO , HO . — En chauffant convenablement le phosphate acide de thallium, on peut éliminer, ainsi que je l'ai dit, un seul équivalent d'eau, et obtenir un second pyrophosphate qui a pour composition PhO^3 , TlO , HO . Ce sel est très-soluble dans l'eau, d'où il se dépose sous la forme d'octaèdres ou de prismes raccourcis, souvent enchevêtrés, qui donnent à la masse une apparence mamelonnée, quand la cristallisation est confuse.

Il précipite les sels d'argent en blanc, et la liqueur est devenue acide. Il fond à une température voisine de 270 degrés. Séché à 100 degrés, il ne retient que son équivalent d'eau de constitution. En effet, $2^{\text{sr}},843$ du sel sec ont perdu au rouge $0^{\text{sr}},081$, tandis que la composition théorique exige une perte de $0^{\text{sr}},087$.

Métaphosphate de thallium, PhO^3 , TlO . — Ce sel peut être obtenu par deux procédés différents, et ne possède pas des propriétés identiques dans les deux cas. Celui qui résulte de la calcination du phosphate acide a une apparence vitreuse, opalescente, est très-peu soluble dans l'eau, et ne précipite bien nettement l'albumine que quand on favorise sa dissolution par quelques gouttes d'acide phosphorique ordinaire.

La seconde variété se prépare ainsi : on verse de l'ammoniaque en excès dans le phosphate neutre de thallium; on sépare de la liqueur le phosphate basique précipité, et l'on obtient une dissolution de phosphate ammoniaco-thallique (1). Celle-ci est évaporée, puis décomposée par la chaleur jusqu'à cessation de dégagement de vapeurs ammoniacales. Le produit résultant est le métaphosphate de thallium.

Ce sel a une apparence vitreuse, est extrêmement soluble dans l'eau, au point qu'on peut évaporer sa dissolution jusqu'à consistance sirupeuse sans le faire cristalliser. Sa réaction est fortement acide. Il précipite en blanc le nitrate d'argent et coagule l'albumine.

Nous pensons que ce métaphosphate soluble ne diffère du précédent, qui est insoluble, que par un faible excès d'acide phosphorique. Nous avons constaté, en effet, qu'en faisant fondre ce métaphosphate insoluble avec quelques gouttes

(1) Ce sel cristallise en beaux prismes droits à base rectangulaire, modifiés sur les arêtes des bases.

d'acide phosphorique ordinaire, on obtenait un composé vitreux, très-soluble, tout à fait semblable à celui qui provient de la décomposition du phosphate ammoniaco-thallique.

ARSÉNIATES DE THALLIUM.

Pour compléter l'analogie du thallium avec les métaux alcalins sous le rapport des composés oxygénés qu'il forme avec les corps de la famille du phosphore, j'ajouterai qu'il existe des arséniates de thallium solubles comme les phosphates. Ainsi, en saturant à l'ébullition l'acide arsénique par le carbonate de thallium, on obtient un arséniate de thallium très-soluble dans l'eau, susceptible de cristalliser en belles aiguilles transparentes, fusible à une température relativement peu élevée, perdant son eau par la calcination et se transformant finalement en une masse vitreuse transparente, absolument comme le phosphate correspondant.

CHLORATE DE THALLIUM, TlO , ClO° .

D'après M. Crookes, quand on dissout à chaud le thallium dans l'acide chlorique, on forme le chlorate. Ce sel cristallise en aiguilles, est anhydre, facilement fusible, mais promptement décomposé par la chaleur.

CHROMATES DE THALLIUM.

Suivant le même auteur, il existerait trois chromates de protoxyde de thallium contenant 1, 2, 3 équivalents d'acide chromique : le chromate neutre est jaune, insoluble; le bichromate est orangé, et le trichromate orangé-rouge. Ce dernier, obtenu par l'action de l'acide nitrique bouillant sur l'un des deux premiers, est un des composés les plus insolubles du thallium.

ALLIAGES DU THALLIUM.

Une étude préliminaire des alliages du thallium ne nous a rien offert de particulièrement remarquable.

L'alliage de 10 parties de bismuth, 4 d'étain et 6 de thallium, correspondant à l'alliage fusible de Darcet, ne fond pas, comme ce dernier, au-dessous de 100 degrés.

L'alliage de 4 parties de thallium et 1 d'antimoine est moins malléable, plus sonore, un peu plus dur, mais plus altérable à l'air que l'alliage des caractères d'imprimerie, auquel il correspond.

Dans le bronze de thallium (4 parties de cuivre et 1 partie de thallium), l'affinité paraît faible entre les deux métaux; car, pendant la fusion de l'alliage, il y a toujours un dégagement de vapeurs violacées d'oxyde de thallium.

Enfin, en alliant l'aluminium, métal facilement dissous par l'acide chlorhydrique,

avec un quart ou un tiers de son poids de thallium, métal difficilement attaqué par le même acide, on n'obtient pas un composé qui résiste sensiblement mieux que l'aluminium.

COMPOSÉS ORGANIQUES DU THALLIUM.

SELS.

Les principaux sels organiques ont été étudiés par M. Kuhlmann fils (1). Ils se rapprochent beaucoup par leurs propriétés des sels alcalins correspondants. M. de la Provostaye (2) a même cru pouvoir conclure, autant toutefois que le lui a permis le peu de netteté des facettes des cristaux soumis à son examen, que le paratartrate et le bitartrate de thallium sont tout à fait isomorphes avec les sels analogues de potasse.

A l'exception du ferrocyanure et du picrate, les sels organiques de thallium sont pour la plupart très-solubles dans l'eau et cristallisent assez facilement. Les cristaux sont le plus souvent anhydres et peu solubles dans l'alcool et l'éther.

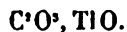
Cyanure. — Le cyanure de thallium peut s'obtenir à l'état de précipité cristallin, en versant peu à peu une dissolution concentrée de cyanure de potassium dans une dissolution saturée de carbonate de thallium, ou en neutralisant l'oxyde par l'acide cyanhydrique. Il est soluble dans l'eau et dans un excès de cyanure de potassium.

Ferrocyanure de thallium. — En versant une dissolution concentrée de ferrocyanure de potassium dans une dissolution saturée de carbonate de thallium, on obtient de petits cristaux jaunes de ferrocyanure de thallium, solubles dans un excès du cyanure alcalin.

Sulfocyanure. — Le sulfocyanure est obtenu en remplaçant le ferrocyanure de potassium par le sulfocyanure. La composition de celui-ci est CyTlS^2 . Il exerce sur les sels de fer la même réaction que le sulfocyanure de potassium : quoique peu soluble, il cristallise aisément en lames brillantes.

Cyanate, CyO, TlO. — Ce sel s'obtient facilement en mélangeant des dissolutions alcooliques de cyanate de potasse et d'acétate de thallium; il se précipite en petites paillettes brillantes très-solubles dans l'eau, et très-peu solubles dans l'alcool.

Oxalates. — L'oxalate neutre est assez soluble dans l'eau, insoluble dans l'alcool et dans l'éther. Une évaporation lente de la dissolution donne des cristaux très-réguliers. D'après M. Crookes, une partie de ce sel exige 69 parties d'eau à 15 degrés, et 11 parties d'eau bouillante. Sa composition est



(1) *Comptes rendus*, t. LV, p. 607.

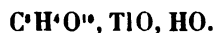
(2) *Comptes rendus*, t. LV, p. 610.

Si l'on fait chauffer une dissolution d'oxalate neutre avec de l'acide oxalique, on obtient un sel environ quatre fois plus soluble suivant M. Crookes, cristallisant en lames micacées, et qui s'effleurit facilement par l'action de la chaleur. C'est l'oxalate acide dont la formule est



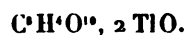
Tartrates. — Le tartrate neutre, $C^2H^4O^{10}$, $2 TlO$, est déliquescent et cristallise difficilement; il est peu soluble dans l'alcool. Les cristaux sont anhydres. Chauffés à 17 degrés, ils se charbonnent; à une plus haute température, ils donnent un résidu d'oxyde et de métal.

Un excès d'acide tartrique précipite d'une dissolution de tartrate neutre du bitartrate de thallium cristallin. Ce sel se présente sous la forme de cristaux prismatiques aplatis, et a pour composition



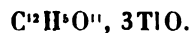
En chauffant de l'oxyde d'antimoine dans une dissolution de bitartrate de thallium, on obtient une sorte d'émétique de ce métal. C'est un sel assez soluble qui cristallise en aiguilles et qui s'effleurit par dessiccation.

Le paratartrate enfin est très-soluble dans l'eau. Il se présente sous la forme de cristaux prismatiques groupés. Sa composition est



Malate. — Déliquescent; fond au-dessous de 100 degrés; cristallise lentement.

Citrate. — Très-déliquescent; cristallise difficilement en houppes soyeuses; un peu soluble dans l'alcool. Composition :



Formiate, C^2HO^3 , TlO . — Très-soluble dans l'eau; fond au-dessous de 100 degrés sans se décomposer; ressemble beaucoup au formiate de potasse.

Acétate, $C^2H^3O^3$, TlO . — Un peu déliquescent; cristallise en longs prismes soyeux ou en lamelles brillantes. Il est très-soluble dans l'alcool, et quand il a été séché sur de l'acide sulfurique à la température ordinaire, il n'a pas d'odeur d'acide acétique, suivant M. Crookes.

Nous pouvons ajouter qu'il peut être facilement fondu sans éprouver de décomposition apparente. A la distillation, il donne de l'acide acétique, de l'acide carbonique, de l'oxyde de carbone, un peu d'acétone et un résidu noirâtre renfermant de l'oxyde de thallium et du thallium métallique.

Valérianate, $C^{10}H^9O^3$, TlO . — Présente la plus grande analogie avec l'acétate : comme lui très-soluble dans l'eau et l'alcool.

Benzoate. — Cristallise en paillettes nacrées; n'est pas volatil.

Urate. — Obtenu par double décomposition de l'urate de potasse et du carbonate de thallium. Il est presque complètement insoluble dans l'eau.

Phénate. — Se dépose d'une dissolution chaude en aiguilles d'une finesse telle, qu'on ne peut en déterminer la forme cristalline. On l'obtient facilement en versant de l'acide phénique dans une dissolution d'oxyde de thallium. Alors le phénate ($C^{12}H^4O$, TlO), très-peu soluble dans l'eau froide, se précipite à l'état cristallin. Il peut fondre sans se décomposer.

Picrate, $C^{12}H^3Tl(AzO^4)^3O^2$. — Cristallise en aiguilles jaunes soyeuses analogues à celles du picrate de potasse, dont il se rapproche par la plupart de ses propriétés. Assez soluble dans l'eau, il est presque complètement insoluble dans l'alcool, de façon qu'on peut le préparer en mélangeant des solutions alcooliques d'acétate de thallium et d'acide picrique. Il détone fortement par la chaleur et donne un résidu charbonneux, comme tous les picrates.

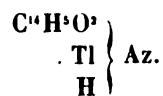
Si l'on mélange des dissolutions alcooliques d'acétate de thallium et de picramate d'ammoniaque, on obtient un précipité cristallin, d'un rouge foncé, presque noir, de picramate de thallium



presque insoluble dans l'alcool, mais assez soluble dans l'eau bouillante. Comme le picrate, ce sel détone par la chaleur.

Sulfanilate de thallium. — Ce sel est déliquescent, cristallise lentement et sans régularité. Peu soluble dans l'alcool et insoluble dans l'éther, il cristallise aisément dans un mélange d'eau, d'alcool et d'éther.

Thallium-benzamide. — Ce composé a été examiné par MM. Church et Crookes. On le prépare en ajoutant de la benzamide pure à une dissolution aqueuse de protoxyde de thallium pur. La benzamide se dissout, et la partie ajoutée en trop cristallise par le refroidissement. En ajoutant un grand excès d'alcool absolu à la portion filtrée, le thallium-benzamide est immédiatement précipité. Ce corps cristallise en fines aiguilles, est soluble dans l'eau à chaud et à froid, en formant une dissolution fortement alcaline, et peut fondre sans décomposition quand il est chauffé avec précaution. Sa composition peut être représentée par



ALCOOLS THALLIQUES.

En faisant chauffer de l'alcool absolu avec du protoxyde préparé et séché dans le vide, non-seulement on dissout de l'oxyde, mais on détermine la formation d'un composé des plus curieux, principalement sous le rapport des propriétés physiques. Ce liquide, que j'ai nommé *alcool thallique*, à cause de l'analogie de composition que je lui supposais avec l'alcool potassique, est caractérisé par sa densité trois fois et demie plus grande que celle de l'eau, et par sa puissance réfractive supérieure à celle du sulfure de carbone.

Dans l'espoir d'obtenir un liquide plus extraordinaire encore sous le rapport des propriétés optiques, j'ai été conduit à rechercher un composé homologue produit par l'huile de pommes de terre, ou alcool amylique, dont la molécule est environ deux fois plus pesante que celle de l'alcool ordinaire ou éthylique. J'ai obtenu, en effet, le composé qu'on peut appeler alcool *amylthallique*, mais dont la densité, comme la réfringence, quoique considérables encore, ne m'ont pas présenté le degré de grandeur relative que je m'attendais à trouver.

Enfin, sur cette voie, j'ai dû naturellement essayer de produire avec l'esprit de bois l'alcool méthylthallique. Ce sont les résultats de mes observations sur les trois alcools *éthylthallique*, *amylthallique* et *méthylthallique* que je vais maintenant faire connaître au lecteur.



Préparation. — En chauffant du protoxyde de thallium sec avec de l'alcool absolu, on donne naissance, avons-nous dit, à de l'alcool éthylthallique. Mais ce mode de préparation est difficile, à cause de la difficulté même de produire du protoxyde sec; d'ailleurs il ne fournit que peu d'huile pesante.

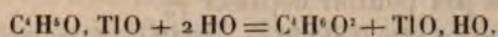
On réussit mieux en faisant arriver un mélange d'air sec, dépouillé d'acide carbonique et de vapeurs alcooliques chaudes sur des feuilles de thallium. Ce procédé laisse encore beaucoup à désirer, et il est préférable d'employer le suivant, qui m'a été suggéré par une observation intéressante, que je rapporterai d'abord.

Ayant un jour placé dans deux petits vases voisins, sous un même entonnoir, de l'alcool et une feuille mince de thallium, je fus tout surpris de trouver le lendemain que le métal avait disparu et qu'à sa place se trouvaient quelques gouttelettes huileuses d'alcool thallique. Comme une partie de l'huile formée avait été décomposée par l'humidité de l'air, puis transformée en carbonate, je dus, pour répéter l'expérience dans des conditions plus favorables, éliminer l'eau et l'acide carbonique de

l'air; dès lors voici le procédé très-simple de préparation auquel je m'arrêtai définitivement.

Sous le récipient d'une machine pneumatique, dans un large vase à fond plat, on met un excès d'alcool absolu, et au-dessus de ce liquide des feuilles très-minces de thallium soutenues par une toile métallique. Le vide est fait dans le récipient, pour enlever avec l'air l'humidité et l'acide carbonique qu'il renferme, et finalement le récipient est mis en communication avec un sac plein d'oxygène, par l'intermédiaire de tubes à potasse et à acide sulfurique. En été, c'est-à-dire sous l'influence d'une température de 20 à 25 degrés, le thallium se transforme rapidement en alcool thallique, que l'on voit perler à la surface du métal, puis tomber au fond du vase, au-dessous de l'alcool. De cette manière, en vingt-quatre heures, sans toucher à l'appareil, on peut se procurer aisément une centaine de grammes de l'huile pesante.

Dans cette préparation, l'alcool absolu s'hydrate toujours; d'où l'on peut induire, indépendamment de l'analogie que présente cette oxydation avec celle des métaux alcalins, que l'alcool thallique est formé par la substitution de 1 équivalent de protoxyde de thallium anhydre à 1 équivalent d'eau de constitution dans l'alcool absolu. Cette induction est confirmée par l'action de l'eau sur l'alcool thallique, laquelle régénère toujours de l'alcool ordinaire, en mettant en liberté du protoxyde jaunâtre hydraté, conformément à l'équation



Mais des faits qui seront rapportés plus loin ayant jeté des doutes dans mon esprit sur la réalité de cette substitution, j'ai essayé, à diverses reprises, d'obtenir une confirmation de mes premières inductions par des pesées faites avant et après la transformation du thallium en huile pesante.

L'expérience était disposée de manière à recueillir directement dans un flacon plein d'alcool absolu, par suite à mesurer sans pertes sensibles, tout l'alcool thallique produit. A cet effet, un entonnoir très-évasé, contenant de l'alcool absolu et au-dessus des feuilles de thallium, était engagé dans le col du flacon, de manière que les gouttelettes huileuses pussent couler le long des parois de l'entonnoir et s'accumuler au fond du flacon.

Les seules pertes notables, difficiles à éviter dans cette expérimentation, résultaient de l'évaporation de l'alcool au moment où l'on raréfiait l'atmosphère du récipient.

Je rapporterai ici les résultats de l'une des meilleures de ces préparations.

On avait mis en présence 116^{gr},33 de thallium en feuilles et 150 centimètres cubes d'alcool absolu, dont la densité à 0 degré par rapport à l'eau à 0 degré

était 0,8067 (1). Après deux jours, dont la température moyenne a été de 17 degrés, on a mis fin à l'expérience en pesant l'alcool thallique produit, et le thallium non dissous, que l'on eut soin de laver préalablement à l'eau pure ainsi que la toile métallique de support, pour recueillir et apprécier l'alcool thallique qui les mouillait. On a déterminé, par un essai alcalimétrique, le métal contenu dans les eaux de lavage; enfin, on a distillé l'alcool surnageant l'huile pesante, pour le séparer de la portion de cette huile qu'il avait dissoute, et la densité du produit a été de nouveau mesurée à zéro.

Voici les résultats obtenus :

Thallium de l'alcool thallique du flacon.....	76,80
» des eaux de lavage.....	10,20
» non dissous.....	28,8
	115,80

La différence avec le poids total employé est 0^{sr},53, c'est-à-dire inférieure à $\frac{1}{200}$ de ce poids.

La densité de l'alcool absolu, primitivement égale à 0,8067 à 0 degré, était devenue 0,817, nombre qui correspond à très-peu près à 97 degrés de l'alcoomètre de Gay-Lussac, et accusait par conséquent 3 pour 100 d'eau. Comme j'avais mesuré 128 centimètres cubes restant, il s'était donc produit en tout 3^{sr},8 d'eau, avec une erreur qui ne me paraît pas pouvoir dépasser $\frac{1}{10}$.

Or, la transformation en alcool thallique, C⁴H⁵O, TlO, des 87 grammes de thallium dissous suppose la production théorique de 3^{sr},83 d'eau. L'accord est plus satisfaisant que je n'avais osé l'espérer.

Il y a, dans les nombres obtenus, une autre vérification qui n'est peut-être pas à dédaigner. Ainsi, sur 150 centimètres cubes d'alcool absolu employé, 28 ont disparu pour former 116 grammes d'alcool thallique, en défalquant, bien entendu, les 3^{sr},8 d'eau produite. Or, 26 centimètres cubes, c'est le volume théorique exigé pour la composition et la proportion de l'huile pesante. La différence en moins de 2 centimètres cubes s'explique très-bien par les pertes inévitables de vapeur alcoolique, soit condensée sur le récipient de la machine pneumatique, soit entraînée par l'aspiration ou la distillation.

(1) Cet alcool avait été obtenu, par une seule distillation, d'un alcool marquant 97 degrés à l'alcoomètre Gay-Lussac, et qui avait séjourné quarante-huit heures en contact avec son volume de chlorure de calcium et de chaux vive. Il n'était pas encore parfaitement absolu. Toutefois son degré de pureté était déjà bien grand, et le nombre que nous avons trouvé pour sa densité, déterminée avec soin, confirme celui qui a été donné par Gay-Lussac, et qui a été vérifié il y a cinq ans par M. Pouillet. En effet, la densité de cet alcool à 15 degrés était 0,7955, ou de 0,0015 seulement supérieure à celle que l'on doit regarder comme rigoureusement exacte.

Ces vérifications, quoique ne pouvant offrir une grande précision, établissaient cependant déjà une forte présomption en faveur de la composition que j'ai assignée à l'alcool éthylthallique. Cette présomption devait être changée en certitude par l'analyse directe.

Composition. — L'alcool thallique, préparé comme il vient d'être dit, offre une densité, par suite une composition variables, soit avec la quantité relative d'alcool employé, soit avec le degré aréométrique de ce liquide. Ainsi, dans quatre préparations différentes, les composés obtenus ont eu pour densités respectives 3,552; 3,550; 3,554 et 3,612. Pour la préparation de trois premiers, on avait pris environ 5 fois autant d'alcool absolu que d'alcool thallique à produire. Dans la quatrième, les proportions étaient encore les mêmes, mais l'alcool employé marquait seulement 97 degrés à l'alcoomètre de Gay-Lussac.

Tous ces liquides dissous, ou plutôt décomposés dans l'eau, ne donnaient finalement à l'analyse que du carbonate de thallium et de l'alcool; d'où l'on pouvait conclure qu'ils ne renfermaient réellement, comme éléments capables d'en faire varier la densité, que de l'alcool ordinaire ou du protoxyde en dissolution.

Je me suis alors efforcé d'arriver à une composition bien définie et constante, d'abord en agitant l'alcool thallique avec de l'alcool absolu, dans l'espoir de transformer en huile pesante l'oxyde simplement dissous, ensuite en chauffant au bain-marie à 100 degrés cette huile, afin de rendre insoluble l'oxyde restant libre. Les résultats obtenus ont été d'abord très-variables et véritablement décourageants.

L'huile pesante dissout de l'alcool absolu en proportions notables, variables d'ailleurs : de là des variations de densité depuis 3,553 jusqu'à 3,489, et des densités anormales allant jusqu'à 3,661. La chaleur chasse à la vérité cet alcool, de façon qu'en maintenant au bain-marie à 100 degrés un échantillon dont le poids spécifique est de 3,489, on obtient successivement après une, deux, trois heures, le nombre 3,501; 3,520; 3,548. Avec un autre échantillon de densité 3,530, on a trouvé les nombres 3,535; 3,541; 3,548; 3,583.

Pendant que les liquides sont soumis à l'influence de la chaleur, on voit se dégager de leur masse de petites bulles de vapeur, dont le nombre diminue avec la durée de l'échauffement. Ces bulles sont formées de vapeurs alcooliques, mais en petite quantité; car 40 grammes d'huile pesante, qui cristallisait à 0 degré, chauffés pendant trois heures, n'ont abandonné dans un petit tube condenseur refroidi à la glace qu'une quantité d'alcool suffisant à peine pour en mouiller les parois.

En soutenant plus longtemps l'action de la chaleur, il est possible de dépasser la densité 3,583. Mais il est à noter qu'à partir d'une certaine limite, 3,550 environ, le composé thallique brunit toujours, en abandonnant une petite quantité d'oxyde noir.

Quant à l'huile pour laquelle on avait trouvé des densités anormales, 3,640, 3,661, la chaleur, au lieu d'en accroître encore le poids, le diminue, et l'on retombe sur la série des densités des précédents échantillons.

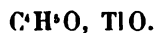
Voici la cause de cette singulière anomalie.

J'avais observé que la plupart des échantillons d'alcool thallique présentaient cette particularité de se troubler, de blanchir à la température zéro, plus ou moins facilement d'ailleurs selon leur origine.

Quelques-uns, ceux qui avaient été maintenus plusieurs heures dans l'eau bouillante et qui n'étaient restés en contact avec aucune trace d'alcool, conservaient seuls leur limpidité, bien qu'ils se congelassent à plusieurs degrés au-dessous de zéro. Un jour, je remarquai qu'un des liquides, celui précisément dont la densité 3,640 m'avait paru la plus anormale, se cristallisait pendant son exposition à la glace, et diminuait notablement de volume. Je fus alors porté à penser que ces densités exceptionnelles de liquides ayant dissous de l'alcool absolu provenaient tout simplement de la diminution de volume qu'ils éprouvaient en changeant d'état plus ou moins complètement à la température de la glace fondante. Par conséquent, pour avoir des résultats comparables, il fallait prendre la densité à une température qui ne produisit ni une congélation complète, ni même le trouble qui semblait indiquer un commencement de changement d'état.

En effet, en opérant à 10 degrés, je trouvai que la densité du liquide cristallisable dans la glace, et primitivement égale à 3,641, se trouvait réduite à 3,504, laquelle, ramenée à 0 degré par le calcul, à l'aide du coefficient de dilatation 0,0007 (1), devenait 3,529.

L'action de la chaleur sur l'alcool thallique, quelle que fût sa densité primitive, ne me donnait donc pas le moyen d'arriver à un composé défini, facile à reproduire et devant correspondre exactement à la formule



J'eus alors recours à la concentration sous le récipient de la machine pneumatique. Mais un autre genre de difficultés, résultant du peu de stabilité de l'alcool thallique, se présenta.

D'abord, j'avais observé que les divers échantillons qui se troublaient ou se solidifiaient à la glace laissaient dégager, en reprenant leur limpidité à la température ambiante, une foule de petites bulles que je pris d'abord pour de l'air. En faisant le vide sur ces échantillons, on augmentait le nombre des bulles au point de produire une véritable ébullition. Toutefois, ce dégagement diminuait peu à

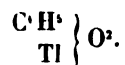
(1) Ce nombre a été déduit de deux densités prises à 0 et à 20 degrés sur un échantillon d'alcool thallique qui ne se troublait pas à la glace.

peu, finissait par disparaître au bout de quelques heures, et avait pour conséquence un accroissement de densité du liquide. Mais, chose curieuse, c'est que le même liquide, refroidi de nouveau à la glace ou congelé dans le tube même où l'on avait mesuré la densité, puis exposé sous le récipient de la machine pneumatique, abandonnait encore notablement des bulles gazeuses, en même temps qu'il augmentait de poids spécifique. Ce phénomène put être reproduit un grand nombre de fois successivement; c'est-à-dire qu'il suffit de congeler l'huile pesante à plusieurs reprises différentes, et, chaque fois, de l'exposer dans le vide, pour en dégager de nouvelles bulles gazeuses, par suite pour augmenter notablement la densité de ce singulier liquide. C'est ainsi qu'après huit jours de congélations et d'expositions successives dans le vide, j'ai fait monter un échantillon de la densité 3,552 à 3,685!

Le liquide soumis à un certain nombre de ces épreuves ne se trouble plus à la glace, et son point de congélation s'abaisse d'autant plus au-dessous de zéro qu'il est lui-même plus lourd. Quant au gaz qui s'est dégagé, qui n'est ni de l'air, ni de l'éther, mais probablement de l'alcool, il est l'indice d'un commencement de décomposition; car le liquide s'est coloré peu à peu, et le plus lourd a fini par brunir complètement.

Toutes les expériences que je viens de rapporter prouvent suffisamment qu'il n'est pas facile d'arriver à une composition nettement définie et constante de l'alcool thallique.

Toutefois, considérant que j'ai obtenu un liquide ne se troublant pas à zéro, et ne brunissant pas à 100 degrés, je suis porté à penser que ce corps, dont la densité variait entre des limites restreintes, voisines de 3,550, est celui qui a la composition



Les analyses suivantes me semblent confirmer cette induction. Dans ces analyses, je me suis borné à doser le thallium, parce que le poids considérable de son équivalent ne m'aurait pas permis de déterminer l'hydrogène avec une précision suffisante.

J'ai donc pesé une certaine quantité d'alcool thallique dans un ballon léger taré à l'avance, et j'ai transformé ce liquide en chlorure. Ce dernier a été desséché avec soin jusqu'à fusion, puis pesé dans le ballon même où il avait été formé.

Voici le tableau des nombres fournis par cinq de ces analyses :

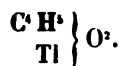
NUMÉROS.	DENSITÉ de l'alcool thallique.	POIDS de l'alcool.	POIDS du chlorure trouvé.	POIDS du chlorure calculé.	DIFFÉRENCE.
I	3,510	17,240 ^{gr}	16,566	16,582	— 0,016
II	3,530	7,718	7,420	7,423	— 0,003
III	3,550	8,750	8,404	8,409	— 0,005
IV	3,598	7,128	6,895	6,859	+ 0,036
V	3,683	15,200	15,773	14,620	+ 0,153

Ces nombres montrent bien que, dans les échantillons qui ont été agités avec de l'alcool absolu et dont la densité est inférieure à 3,55, il y a une quantité de thallium un peu moindre que celle qui correspond rigoureusement à la formule



tandis que dans les échantillons les plus lourds, le n° V en particulier, il y a manifestement un excès de métal. Ces résultats confirment en outre l'opinion déjà exprimée que le nombre, 3,55, doit être peu différent de celui qui représente exactement la densité correspondant à la composition théorique en question.

Il n'est pas inutile de faire observer que les analyses des n° II et III, c'est-à-dire des échantillons dépouillés d'alcool, mais non encore décomposés, ne peuvent s'accorder avec aucune formule simple différente de



D'ailleurs, il ne faut pas s'exagérer l'importance des différences offertes par les n° II et III; elles sont en réalité très-faibles, puisqu'elles sont inférieures à un millième de la quantité analysée.

Propriétés de l'alcool thallique. — Je me suis attaché à l'étude de ce curieux liquide, je dois le dire, surtout à cause de ses propriétés physiques exceptionnelles. C'est le plus lourd des liquides composés connus; c'est aussi, on va le voir, celui qui est doué de la plus grande énergie de réfraction et de dispersion pour la lumière.

J'ai mesuré les coefficients relatifs à ces deux ordres de phénomènes avec un instrument qui n'est autre que le goniomètre de M. Babinet, dont le cercle divisé permettait d'apprécier directement les 15 secondes. On obtenait l'angle de déviation en mesurant l'angle d'écart d'un même rayon réfracté par le prisme, lorsqu'on donne à celui-ci deux positions différant entre elles du supplément de l'angle du prisme; de cette façon, la valeur de la déviation minima, moitié de l'angle mesuré, était obtenue avec une erreur au plus égale à 8 secondes, par suite la valeur de l'indice avec une erreur à peine supérieure à celle que produit une différence de $\frac{1}{10}$ de degré dans la température.

Cette influence de la température est si considérable, qu'il est de la plus haute importance d'effectuer les mesures des indices correspondant aux différentes raies à un degré déterminé et constant. Des corrections calculées sur des observations faites à des degrés différents sont toujours incertaines, et elles ne sont pas du tout les mêmes pour des raies différentes. Nous avons eu soin d'opérer autant que possible à une température constante, quoique ici l'incertitude résultant de la composition du liquide soumis aux mesures ne nous imposât pas une aussi rigoureuse obligation.

Nous ne rapporterons que les indices correspondant aux trois raies principales B, D, H, comparés aux indices du sulfure de carbone mesurés dans des conditions identiques.

ALCOOL THALLIQUE.

DENSITÉ : 3,550. — TEMPÉRATURE : 20 DEGRÉS.

RAIE B.	RAIE D.	RAIE H.	POUVOIR DISPERSIF.
1,6615	1,6776	1,7590	0,0975

SULFURE DE CARBONE PUR.

TEMPÉRATURE : 20 DEGRÉS.

RAIE B.	RAIE D.	RAIE H.	POUVOIR DISPERSIF.
1,6140	1,6330	1,6935	0,0795

Ces pouvoirs réfringents et dispersifs, déjà si considérables, peuvent encore s'accroître avec la densité du composé thallique, ainsi que le prouvent les nombres suivants :

ALCOOL THALLIQUE.

DENSITÉ : 3,612; TRÈS-BLANC ET TRÈS-LIMPIDE. — TEMPÉRATURE : 20 DEGRÉS.

RAIE B.	RAIE D.	RAIE H.	POUVOIR DISPERSIF.
1,6725	1,7170	1,7678	0,0953

Si l'état de coloration du n° V, page 119, de densité 3,683, m'eût permis d'en mesurer l'indice, nul doute que j'eusse obtenu des nombres supérieurs encore aux précédents.

Par ces propriétés exceptionnelles, l'alcool thallique pourra devenir le sujet de vérifications ou d'applications scientifiques. Il sera curieux, par exemple, de répéter sur lui les intéressantes expériences que M. Verdet a faites sur le sulfure de carbone dans le but de rechercher les rapports qui existent entre le magnétisme et la lumière.

L'alcool thallique est soluble dans l'alcool absolu dans la proportion de $\frac{1}{6}$ de son poids environ. La dissolution se trouble quand on commence à la chauffer, pour reprendre sa limpidité, soit par une température plus élevée, soit par le refroidissement. Elle dépose du protoxyde blanc si l'alcool n'est pas anhydre.

Une conséquence de cette solubilité, c'est que l'alcool doit lui-même pouvoir se dissoudre dans l'huile pesante. Nous avons vu en effet qu'en agitant un mélange de ces deux liquides, on diminuait la densité du second; mais que par la chaleur ou l'exposition dans le vide, on enlevait aisément le premier, de manière à accroître la densité jusqu'à une certaine limite, sans décomposition apparente.

L'éther est le dissolvant le plus parfait de l'alcool thallique. S'il est pur et privé d'air, la solution reste limpide. Mais s'il est impur, si c'est de l'éther ordinaire des pharmaciens, eût-il même été rectifié une ou deux fois, les choses se passent autrement et au premier abord d'une façon très-compiquée.

Un mélange à volumes à peu près égaux des deux liquides ne reste qu'un instant limpide. Il devient presque immédiatement opalescent, jaunâtre, souvent brun, si l'on augmente la proportion d'éther; puis on voit apparaître et grandir sur une foule de points de la paroi du récipient comme autant de centres de cristaux rayonnés, qui ne sont autre chose que du protoxyde hydraté. C'est merveille de voir la facilité avec laquelle se développent ces cristaux. Mais, indépendamment de cette action, qui est due à l'eau que renferme l'éther, il y en a une autre qui consiste dans la coloration brune que prennent peu à peu les cristaux et la liqueur. Cette coloration est due, soit à l'oxygène dissous dans l'éther,

soit plutôt à un principe oxydant que l'on concentre en distillant la partie la plus volatile de l'éther.

Ces réactions opérées, le mélange s'éclaircit peu à peu; mais une seconde addition d'éther y détermine un nouveau trouble et une cristallisation nouvelle, et ainsi de suite jusqu'à une certaine limite, qui ne me paraît atteinte qu'au moment où la dissolution ne renferme plus d'alcool thallique.

J'ajoute que la dissolution limpide, qui ne dépose plus de protoxyde à la température ordinaire, en peut abandonner par un refroidissement lent sous la forme de beaux cristaux blancs. Le protoxyde de thallium est donc blanc quand il est pur. Un refroidissement brusque de plusieurs degrés au-dessous de zéro produit également un nouveau dépôt blanc, mais amorphe, du même oxyde.

Enfin, en distillant à 50 degrés un mélange étheré limpide, on obtient comme résidu tout l'alcool thallique qui était en dissolution.

Cette action de l'éther ordinaire est tellement sensible et caractéristique, qu'elle me paraît fournir un excellent moyen de reconnaître si un éther est pur et anhydre.

Le chloroforme dissout aussi, sans décomposition apparente d'abord, une grande quantité d'alcool thallique. Mais au bout de peu de temps, le mélange se trouble et abandonne lentement d'abondants cristaux de protochlorure de thallium. En même temps, il se produit une matière photogénique très-sensible à l'action de la lumière, qui colore le chlorure en rouge foncé; de l'alcool est mis en liberté, et le tout est fortement alcalin. On trouve en outre, dans le résidu soluble, après la séparation du chlorure, un sel qui présente les caractères des formiates.

L'alcool thallique se congèle par un froid de 3 degrés environ au-dessous de zéro. Il se cristallise facilement à la glace et même un peu au-dessus, quand il a été agité avec de l'alcool absolu. Mais s'il a été concentré par les moyens que j'ai fait connaître, au point d'atteindre des densités supérieures à 3,550, on observe que son point de congélation s'abaisse successivement jusqu'à -5 , -10 , et même -15 degrés; c'est-à-dire d'autant plus que la densité augmente davantage.

La dilatation apparente pour 100 degrés, prise sur un échantillon dont la densité était 3,560, a été trouvée égale à 0,072. Le coefficient de dilatation moyen entre 0 et 10 degrés, déduit des densités prises, à ces deux températures, sur un échantillon semblable, qui ne se troublait pas à la glace, est égal à 0,00070, nombre peu différent de 0,00072, coefficient moyen entre 0 et 100 degrés.

L'action de la chaleur sur l'alcool thallique m'a paru des plus remarquables, et diffère essentiellement de celle que le même agent exerce sur l'alcool potassique, ce qui se conçoit d'ailleurs *a priori*, puisque le potassium ne peut être réduit comme le thallium. Je l'ai étudiée à divers reprises, avec l'espoir de trouver dans les pro-

duits de la décomposition une confirmation de la formule que j'ai assignée à l'huile pesante.

Lorsqu'on chauffe ce composé dans un bain d'acide sulfurique ou d'huile, de manière à graduer à volonté la température, on observe vers 130 degrés un dégagement sensible de petites bulles gazeuses. Ces bulles augmentent rapidement à mesure que la température monte. Entre 170 et 180 degrés, une véritable ébullition a lieu, et l'on voit tout à coup apparaître, dans la masse du liquide, des lamelles brillantes de thallium. En même temps, de l'alcool ordinaire passe à la distillation. Le gaz qui se dégage, avec une régularité frappante, si l'on ne dépasse pas 190 à 200 degrés, est de l'hydrogène presque pur.

Afin de me rendre un compte exact des diverses particularités de cette distillation, j'ai disposé un appareil permettant de condenser les vapeurs alcooliques dans un petit tube en U refroidi à la glace, et de recueillir les gaz sur l'eau ou le mercure. Voici les résultats d'une de ces expériences, l'une des meilleures de toutes celles qui ont pu être menées à bonne fin.

17^{gr}, 758 d'alcool thallique, dont la densité à zéro était 3,558, ont dégagé, de 160 à 200 degrés, 289 centimètres cubes d'un gaz brûlant exactement comme l'hydrogène et que deux analyses eudiométriques ont prouvé être en effet de l'hydrogène pur.

On a recueilli en même temps, dans le tube condenseur, 2^{gr}, 149 d'un liquide renfermant quelques lames cristallines blanches, nacrées, d'un corps qui n'était que du carbonate de thallium, entraîné sans doute mécaniquement par le dégagement gazeux. Le liquide alcoolique, séparé par distillation de ce carbonate, brûlait avec la flamme bleu pâle de l'alcool ordinaire, bouillait de 79 à 80 degrés, et avait pour densité à 0 degré le nombre 0,811, ou 0,799 à 15 degrés, valeur exacte de la densité de l'alcool absolu à 5 millièmes près.

Enfin, le résidu du tube à décomposition était très-fortement alcalin. Il renfermait de l'oxyde, du carbonate et de l'acétate de thallium mélangés à une masse relativement très-considérable de métal réduit.

Quand la température est poussée trop brusquement vers la fin de l'opération, il se dégage des vapeurs blanches composées de carbonate, lesquelles doivent être accompagnées d'un peu de gaz carbonique, puisque à la distillation le carbonate de thallium se décompose toujours partiellement.

Si, au lieu d'arrêter l'expérience vers 200 degrés, lorsque le dégagement d'hydrogène a cessé, on chauffe à feu nu, de manière à arriver peu à peu à une décomposition totale, on ne fait dégager que des gaz carbonique et oxyde de carbone, à peu près dans le rapport de 3 à 1 en volume, un peu d'acétone et de l'acide acétique.

Il est toujours très-difficile de terminer d'une façon satisfaisante l'opération,

parce que le tube où elle se fait fond et crève sous l'influence de l'oxyde restant avec le thallium métallique.

Quant à la représentation symbolique des réactions précédentes, je dois déclarer que je n'en ai pas trouvé de satisfaisante. Une étude plus approfondie de l'action de la chaleur est donc à refaire.

L'alcool thallique est décomposé par l'humidité de l'air; l'oxyde s'hydrate et devient libre en même temps que l'alcool.

La décomposition est plus rapide au contact de l'eau, surtout si on la favorise par l'agitation. Le protoxyde hydraté apparaît alors sous la forme d'une masse volumineuse d'un blanc jaunâtre, qui se dissout avec facilité et tout entière dans l'eau.

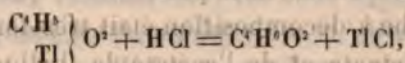
Cette décomposition que l'humidité de l'air exerce sur l'alcool thallique rend difficile sa conservation. On le préserve de toute altération en le recouvrant d'une couche d'alcool absolu.

Les tubes, les flacons, les récipients fermés de toute nature où on le conserve noircissent au bout d'un certain temps, variable avec la température et le volume d'air confiné. C'est la variété noire, peu soluble, du protoxyde, qui se produit par suite d'une déshydratation, et non pas le peroxyde, comme on pourrait le croire *à priori*.

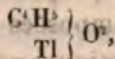
L'alcool thallique peut être décomposé et le thallium déplacé, mais lentement, par le sodium et le potassium.

Le fer, le zinc, le plomb, même sous l'influence d'un courant électrique, n'exercent aucune action semblable.

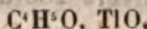
Les acides sulfurique et chlorhydrique s'emparent de l'oxyde de thallium pour former des sels en dégageant de l'alcool régénéré. La réaction me paraît devoir être formulée ainsi :



le groupement moléculaire du composé thallique étant représenté par



de préférence à celui que représenterait la formule



parce que jamais, dans les réactions auxquelles j'ai soumis ce liquide, je n'ai pu dégager d'éther. Cette manière de voir me semble en outre confirmée par l'action de l'acide carbonique qui s'unit directement à l'alcool thallique, au lieu de se combiner simplement avec l'oxyde.

En effet, si l'on met en présence le gaz acide sec et l'huile pesante, on voit se former immédiatement une pellicule blanche d'un composé dont on accroît aisément la quantité, soit en agitant pour renouveler le contact des éléments réagissants, soit en s'aidant de la chaleur pour hâter la combinaison. Le corps solide blanc ainsi obtenu est bien une combinaison d'alcool thallique et d'acide carbonique, car il ne se décompose pas à 100 degrés, tandis que chauffé plus fortement dans un tube de verre, il laisse dégager des fumées épaisses, blanches, un liquide empyreumatique, et donne comme résidu du thallium métallique. Le carbonate de thallium, au contraire, sous l'influence de la chaleur, se décompose en dégageant simplement du gaz carbonique, et laisse dans le verre un résidu jaune de protoxyde fondu.

L'action du sulfure de carbone sur l'alcool thallique est des plus vives, si l'on mélange sans précautions ces deux liquides. Il y a échauffement considérable de toute la masse, qui est en partie transformée en sulfure noir, et projection de la matière hors du tube où se fait l'expérience. En laissant tomber goutte à goutte l'alcool thallique dans le sulfure de carbone, et en ayant soin de remuer, on modère la réaction en même temps qu'on change la nature du produit, qui se présente alors sous la forme d'une sorte de gelée volumineuse jaunâtre.

Enfin, comme dernière propriété pouvant servir à caractériser l'alcool éthylthallique, je dirai que ce corps s'enflamme au contact d'une bougie allumée, et brûle avec une flamme peu éclairante verte. Le résidu de la combustion consiste en oxyde noir et en gouttelettes de thallium.

ALCOOL AMYLTHALLIQUE, $\left. \begin{matrix} C^mH^n \\ Tl \end{matrix} \right\} O^x$.

Ce composé peut être préparé de la même manière que le précédent; mais l'action est beaucoup plus lente, ce qu'explique assez bien la différence de tension de vapeur des deux alcools amylique et éthylique, à la température ordinaire. Aussi est-il préférable de recourir au moyen suivant.

On introduit dans une cornue, en proportions équivalentes, de l'alcool éthylthallique et de l'alcool amylique pur, et on soumet le mélange à l'action de la chaleur. Les deux liquides, qui sont restés séparés à cause de la petite quantité relative d'alcool amylique, ne tardent pas à se mêler intimement; une ébullition très-vive se manifeste de 80 à 90 degrés; c'est de l'alcool ordinaire déplacé qui distille. Quand le déplacement est à peu près complet, l'ébullition cesse, et la température s'élève graduellement. Il est convenable de la laisser monter jusqu'à 140 degrés, afin d'assurer tout le départ de l'alcool amylique qui pouvait être en excès. Si l'on dépassait cette limite, on en serait d'ailleurs bientôt averti par le trouble, le commencement de décomposition qu'éprouverait le liquide de la cornue.

Ainsi préparé, l'alcool amythallique est une huile pesante, dont l'odeur rappelle celle de l'alcool qui lui a donné naissance. Sa densité est 2,465. Mais, comme celle de son homologue l'alcool éthylthallique, elle peut varier, non toutefois dans des limites aussi étendues, et atteindre la valeur 2,518. Ce serait encore le plus lourd des liquides connus, si le composé précédent n'existait pas.

Son indice de réfraction, correspondant à la raie D, est égal à 1,572 à 20 degrés, un peu inférieur par conséquent à celui du sulfure de carbone. Il augmente aussi avec la densité.

L'alcool amythallique ne se congèle pas par un froid de 20 degrés au-dessous de zéro.

Il est très-soluble dans l'alcool amylique, mais très-peu dans l'alcool ordinaire. Comme son homologue, il se dissout d'abord dans le chloroforme; puis la dissolution se trouble; il y a production de chlorure de thallium et d'une substance photogénique qui ne noircit qu'à la lumière.

L'action de l'éther est la même que sur l'alcool éthylthallique, c'est-à-dire que l'éther dissout facilement l'alcool amythallique sans coloration ni dépôt cristallin, s'il est pur; mais s'il est aqueux ou aéré, il produit un trouble, une coloration plus ou moins foncée avec dépôt de protoxyde cristallisé.

L'alcool amythallique brûle avec une flamme plus blanche, plus éclairante, mais moins verte que son homologue. Le résidu de la combustion est d'ailleurs semblable.

Il en est aussi de même de l'action d'une chaleur réglée. De l'hydrogène pur se dégage, de l'alcool amylique distille, du carbonate et du valérianate de thallium restent avec une quantité relativement considérable de métal réduit.

La décomposition par l'humidité de l'air et par l'eau se fait avec beaucoup plus de lenteur que celle de l'alcool éthylthallique; c'est à ce point que si la proportion d'eau n'est pas relativement considérable, les deux liquides ne peuvent que très-difficilement se mélanger et agir l'un sur l'autre. L'alcool amylique, déplacé par l'eau, surnage la dissolution.

Cette différence d'action des deux composés thalliques s'explique bien par l'insolubilité dans l'eau de l'alcool amylique.

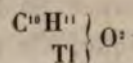
La même résistance à la décomposition par l'eau fait que l'alcool amythallique s'altère moins vite à l'air que l'alcool éthylthallique, et que les tubes, les flacons où on le conserve, noircissent avec plus de lenteur.

En résumé, les propriétés de l'alcool amythallique ressemblent beaucoup à celles de l'alcool éthylthallique.

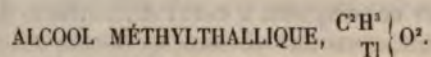
Cette analogie des deux composés pouvait me dispenser sans doute de répéter sur le dernier les analyses que j'avais exécutées sur le premier. Aussi me suis-je borné à une seule détermination.

5^{gr},882 d'alcool amythallique, dont la densité était 2,464, ont donné 4^{gr},825 de

chlorure de thallium, tandis que la composition théorique représentée par



exige 4^{sr},841. La différence 0,016 est assez faible, eu égard à la difficulté d'avoir le composé thallique pur, pour que l'on puisse admettre la composition théorique en question.



Ce composé ne se produit qu'en quantités insignifiantes par la méthode générale exposée plus haut. Les feuilles de thallium se recouvrent d'une sorte de croûte blanche, qui est à la vérité de l'alcool méthylthallique, mais dont l'insolubilité dans l'esprit de bois s'oppose à l'action ultérieure des vapeurs oxydantes.

On le prépare rapidement en aussi grande quantité que l'on désire, en versant tout simplement un excès d'alcool méthylique pur sur l'un des deux alcools thalliques précédents. On agite le mélange, et l'on voit aussitôt apparaître un corps blanc, un peu grenu, très-peu soluble dans l'esprit de bois où il peut cependant cristalliser; c'est l'alcool méthylthallique. La réaction est accompagnée d'un développement de chaleur sensible.

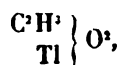
Si l'on ne met pas de l'esprit de bois en excès, la décomposition est incomplète: c'est ce qui arrive, par exemple, avec des proportions équivalentes de cet alcool et du composé éthylthallique. On peut même, par une addition d'alcool ordinaire, rendre l'action de ce dernier prépondérante au point de voir le composé solide blanc se liquéfier pour redevenir alcool éthylthallique. Dans le cas d'une décomposition incomplète, l'application de la chaleur fait fondre aisément la partie solide, laquelle repasse de nouveau par le refroidissement à l'état solide sous la forme de gros cristaux prismatiques obliques.

On enlève rapidement à l'alcool méthylthallique l'excès d'esprit de bois qu'il contient, en le pressant entre des doubles de papier buvard un peu chauds, et on achève de le dessécher sous le récipient de la machine pneumatique, en présence de fragments de sodium pour absorber les vapeurs méthyliques.

Ainsi séché, l'alcool méthylthallique est un corps solide blanc, cinq ou six fois plus lourd que l'eau, et possédant, comme on pouvait le prévoir *à priori*, des propriétés semblables à celles des précédents composés thalliques, ses homologues.

Comme eux il est peu stable, facilement décomposé par l'eau ou par l'humidité de l'air; soluble, faiblement toutefois, dans l'éther, plus faiblement encore dans le chloroforme; il noircit et se décompose sous l'action de la chaleur, en dégageant non-seulement de l'hydrogène et de l'alcool méthylique, mais encore beaucoup d'oxyde de carbone; enfin il brûle à l'air avec une flamme fortement colorée en vert, et laisse pour résidu de l'oxyde noir avec des gouttelettes de métal.

Sa composition doit être représentée également par



ainsi que le veut l'analogie, confirmée par les résultats suivants de l'analyse :

4^{gr},436 d'alcool solide et sec ont donné 4^{gr},568 de chlorure, tandis que la théorie exige 4^{gr},554.

L'existence des trois composés que forme le thallium avec les alcools les plus connus indique suffisamment que les autres alcools, aujourd'hui nombreux, dont s'est enrichie la Chimie, pourraient donner naissance à des composés homologues. J'ai borné mes observations aux trois précédents, parce que mon but n'avait été d'abord que de rechercher des corps extrêmement réfringents et dispersifs.

Je dois ajouter qu'en plaçant dans les mêmes conditions d'oxydation du potassium, du sodium, du thallium, du magnésium, de l'aluminium et du plomb, les trois premiers métaux seuls se dissolvent dans les vapeurs alcooliques pour constituer les alcools métalliques correspondants, tandis que tous les autres n'éprouvent aucune altération ; nouvelle analogie à ajouter à toutes celles que j'ai déjà signalées pour rapprocher le thallium des métaux alcalins.

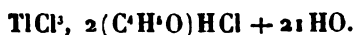
ÉTHERS CHLORO ET BROMOTHALLIQUES.

Nous en aurons fini avec les composés organiques du thallium en décrivant deux éthers dont nous devons la connaissance à M. Nicklès (1).

Ce savant a reconnu que le trichlorure de thallium est apte à s'unir à plusieurs équivalents d'éther, confirmant ainsi ce fait général que les chlorures et bromures métalliques susceptibles de jouer le rôle d'acides peuvent s'unir à plusieurs équivalents d'éther, comme pourrait le faire un acide polybasique.

L'*éther chlorothallique* s'obtient en faisant arriver un courant de chlore dans de l'éther surnageant du thallium, ou mieux du protochlorure de thallium. La dissolution s'opère peu à peu en formant deux couches. Le liquide inférieur est fumant ; il renferme l'éther chlorothallique associé à des produits chlorés dérivés par substitution, dont on se débarrasse en distillant le mélange au bain-marie, dans un courant de gaz carbonique sec.

Le résidu de la distillation constitue le composé cherché, auquel M. Nicklès attribue la formule



Ce composé est très-acide ; il fait effervescence avec les carbonates alcalins. Un

(1) *Comptes rendus*, t. LVIII, p. 537 ; 1864.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. Tome II.

excès de l'un de ces corps en sépare l'oxyde TlO^2 . L'acide sulfureux détruit également cet éther en produisant du protochlorure TlCl .

L'éther bromothallique, TlBr^2 , $3(\text{C}^4\text{H}^5\text{O})$, partage, en général, les propriétés du précédent et se prépare comme lui. Il n'est pas volatil; chauffé, il donne un résidu cristallisé en aiguilles jaunes formées de bromure de thallium.

L'éther iodothallique, s'il existe, offre peu de stabilité. En traitant le thallium par de l'iode et de l'éther, on obtient une dissolution brune, laquelle abandonne peu à peu des aiguilles de triiodure I^3Tl , très-solubles dans l'éther, et contenant de l'iode en excès. Le même iodure se forme quand on fait digérer du thallium, de l'iode et un iodure alcalin avec de l'alcool : il se produit alors un iodure double.

ÉQUIVALENT.

La détermination de l'équivalent d'un métal est toujours une opération fort délicate, surtout lorsqu'il s'agit d'un équivalent très-élevé, comme celui du thallium. Aussi, pour faire juger du degré de confiance que mérite le nombre vraiment extraordinaire que nous avons obtenu, nous rapporterons fidèlement les résultats tels que nous les avons trouvés.

D'abord, nous avons remarqué qu'en décomposant par la pile électrique ou par le zinc du chlorure et du sulfate de thallium, nous obtenions des quantités de métal considérables relativement au poids du sel employé. Ensuite, par des pesées du zinc dissous et du thallium déposé au sein de dissolutions de sulfate légèrement acides, nous avons reconnu que la valeur de l'équivalent devait être peu éloignée de 200, car toujours il y avait environ six fois autant de zinc disparu que de thallium précipité.

Exemples :

1^o 3^{sr},915 de zinc dissous pour 23^{sr},03 de thallium déposé.

2^o 4^{sr},666 » 27^{sr},60 »

3^o 8^{sr},50 » 50^{sr},44 »

Il n'est pas inutile de faire observer que les rapports des premiers nombres aux seconds sont nécessairement un peu trop forts; car, d'une part, on pouvait détacher avec le thallium quelques parcelles de zinc non dissous, et, d'autre part, pour enlever ces parcelles, on avait soin de laver le thallium précipité avec de l'eau aiguisée d'acide chlorhydrique, qui dissout toujours un peu de ce métal.

Nous avons essayé alors des déterminations plus précises à l'aide du sulfate et du chlorure de thallium, décomposés par les nitrates de baryte ou d'argent. Les premiers avaient été purifiés avec soin et en outre fondus.

Équivalent.

I. 3^{sr},423 de sulfate fondu ont donné de sulfate de baryte calciné. . 1^{sr},623 = 197,7

II. 3^{sr},641 de chlorure fondu ont donné de chlorure d'argent séché

à 100 degrés. 2^{sr},160 = 206

En présence de ces résultats peu concordants, je fis redissoudre et cristalliser le sulfate fondu, et je procédai à de nouvelles analyses de ce sel desséché à 200 degrés, et du chlorure fondu ou seulement séché à 150 degrés, en m'entourant de toutes les précautions possibles.

Voici les nombres obtenus :

	Équivalent.
I. 3 ^{re} , 423 de sulfate séché à 200 degrés ont donné de sulfate de baryte.	1 ^{re} , 578 = 204,3
II. 3 ^{re} , 912 de chlorure fondu ont donné de chlorure d'argent.....	2 ^{re} , 346 = 203,8
III. 3 grammes de chlorure fondu ont donné de chlorure d'argent....	1 ^{re} , 8015 = 203,5
IV. 3 ^{re} , 913 de chlorure séché à 150 degrés ont donné de chlorure d'argent..	2 ^{re} , 336 = 204,7
Moyenne.....	204,2

La concordance de ces résultats ne pouvait être fortuite et m'a autorisé à fixer l'équivalent du thallium à 204. Parmi tous les corps connus, le bismuth seul a un équivalent plus élevé, 210, d'après les déterminations de M. Dumas.

Je crois devoir ajouter que le sulfate de baryte retient énergiquement du nitrate de thallium, et qu'il importe de prolonger les lavages pour faire disparaître les dernières traces de ce sel. Enfin, le protochlorure étant peu soluble, 2 parties environ pour 100 d'eau bouillante, on avait soin d'employer 800 à 900 grammes d'eau pure à chaque opération, de manière à pouvoir précipiter le chlore par l'argent dans une liqueur simplement tiède.

En exposant les propriétés physiques du thallium, nous avons donné pour sa chaleur spécifique le nombre 0,0325. La moitié de ce nombre, multipliée par l'équivalent 204, ou plutôt par 2550 rapporté à l'oxygène 100, donne 41,43. Or, les produits des équivalents des métaux purs par leur chaleur spécifique varient, dans les expériences de M. Regnault, entre 38 et 42. Ce produit pour le potassium est 41,64. Nous pouvons donc conclure, en admettant la loi de Dulong, que pour le thallium, comme pour le potassium et le sodium, il faudra dédoubler l'équivalent chimique, et écrire pour le protoxyde du premier Tl^2O , comme on doit écrire M^2O pour le protoxyde des derniers.

Cet équivalent a été de nouveau déterminé par MM. Werther et Crookes, qui ont obtenu le même nombre que nous à une unité près.

DOSAGE DU THALLIUM.

On éprouve des difficultés sérieuses chaque fois que l'on veut doser le thallium dans ses combinaisons. J'ai fait de vaines tentatives pour opérer ce dosage soit par le sulfure, le plus insoluble des composés du métal, soit par le chlorure double de platine et de potassium.

M. Ed. Willm (1), après avoir essayé le dosage par le chlorure, puis par l'iodure (2), pense avoir obtenu un résultat plus satisfaisant en employant le permanganate de potasse.

Lorsqu'on ajoute la solution de ce sel à une dissolution chaude de protochlorure de thallium, elle se décolore instantanément : le terme de cette réaction est facile à saisir, beaucoup mieux que dans le dosage du fer. Pour le succès de l'opération, il est nécessaire que le thallium se trouve dans la liqueur à l'état de chlorure, ou tout au moins soit en présence d'un excès d'acide chlorhydrique. Il faut, en outre, que le sel thallique soit au minimum d'oxydation ou de chloruration, ce que l'on obtient aisément au moyen de l'acide sulfureux. Relativement au degré de concentration des liqueurs, on doit prendre environ 0^{mt}, 50 de liquide pour 2 grammes de thallium, à cause du peu de solubilité de son protochlorure. Le permanganate doit être aussi plus étendu que pour le dosage du fer.

Le titrage du permanganate peut se faire, soit à l'aide de fer pur, soit avec du thallium ou une combinaison cristallisée et stable de ce dernier, par exemple l'alun. M. Willm rapporte cinq exemples de déterminations qui prouvent que la méthode qu'il propose, en adoptant l'équivalent 204, est applicable dans la majorité des cas, et susceptible d'une assez grande exactitude.

CLASSIFICATION DU THALLIUM.

Dans nos premiers travaux sur le thallium, nous avons cru pouvoir assigner à cet élément une place à côté des métaux alcalins, et M. Dumas, dans son Rapport sur ces travaux, a prêté à cette classification l'appui de sa haute autorité. En Angleterre, quelques savants, M. Crookes en première ligne, ont préféré au contraire rapprocher le thallium des métaux lourds, comme le plomb. Les principaux faits cités par ce chimiste en faveur de son opinion sont (3) : l'insolubilité complète ou presque complète de quelques composés, tels que le trioxyde, le sulfure, le phosphore, l'iodure, le bromure, le protochlorure, le chromate et le phosphate de thallium; la facilité avec laquelle le protoxyde se déshydrate et perd en grande partie sa solubilité; le haut poids atomique du métal; la prompte réduction de ses sels par le zinc; son action toxique; la complexité de son spectre, contrastant, d'après le Dr Miller, avec celui des métaux alcalins; son faible pouvoir conducteur

(1) *Bulletin de la Société Chimique*; juillet 1863.

(2) Le dosage par l'iodure de potassium donne d'assez bons résultats, à la condition d'opérer en présence d'un excès d'ammoniaque, de filtrer à froid et de ne pas faire la précipitation dans une liqueur trop étendue (G. WERTHER, *Journal für praktische Chemie*, t. XCI).

(3) On Thallium, *Journal de la Société Chimique de Londres*, 2^e série, vol. II; mai 1864.

pour l'électricité, qui est à peu près celui du plomb, et en général ses propriétés physiques.

D'abord, quelques-uns de ces arguments sont contestables, et d'autres, mieux compris, sont en faveur de l'alcalinité du thallium.

Ainsi le baryum, qui est bien voisin du potassium, est aussi vénéneux que le thallium. Ainsi encore, malgré tout notre respect pour la science du professeur Miller, nous devons dire que le spectre du nouveau métal observé par nous sur deux cylindres de ce corps parfaitement purs, entre lesquels jaillissait l'étincelle de la bobine de Ruhmkorff, ne nous a pas paru offrir une complication beaucoup plus grande que celle qui nous était offerte, dans les mêmes circonstances, par le sodium. D'ailleurs, si au lieu de considérer le spectre des métaux dans la flamme électrique, nous le considérons dans la flamme de la lampe Bunsen, ou celle du gaz tonnant, le thallium se présente à nous, en adoptant le raisonnement de M. Miller, comme le métal alcalin par excellence, puisque son spectre est plus simple que celui des métaux alcalins eux-mêmes. Si l'on contestait la valeur de ce mode de raisonnement, je répondrais que nous sommes encore trop peu éclairés sur la nature des modifications que la chaleur apporte dans l'état moléculaire des corps, surtout dans les hautes températures, pour qu'un argument tiré de l'une de ces modifications puisse avoir une importance décisive, et cette réponse serait singulièrement fortifiée par les récentes et curieuses expériences de MM. Plücker et Hittorf sur *les spectres des gaz et des vapeurs en ignition, étudiés principalement sous le rapport des différences fournies par les mêmes substances gazeuses élémentaires*.

Enfin, s'il est vrai que la conductibilité du thallium pour l'électricité soit voisine de celle du plomb, on peut dire, pour contre-balancer l'argument, que d'après MM. Mathiessen et Vogt la résistance à la conductibilité pour 100 degrés rapproche au contraire le thallium des métaux alcalino-terreux.

Je ferai remarquer d'ailleurs que je n'attache pas une trop grande importance à ces sortes de raisons tirées de propriétés physiques dont le rôle, dans la classification, ne paraît être que secondaire.

Ce qui est bien autrement important pour caractériser et classer un corps, c'est l'ensemble de ses propriétés chimiques les plus essentielles, les plus nombreuses, et l'isomorphisme.

Or, voici déjà une de ces propriétés très-caractéristiques que M. Crookes, un peu trop préoccupé sans doute de trouver quelque'un de mes résultats inexacts, a cru pouvoir invoquer pour les besoins de son argumentation : c'est l'action de l'acide phosphorique sur le thallium, d'où résulte non pas seulement un phosphate insoluble, mais, ainsi que nous l'avons montré, plusieurs phosphates solubles, aussi variés dans leur composition et leurs propriétés que les phosphates alcalins eux-mêmes. De plus, il existe des arsénates de thallium solubles. Les métaux

alcalins seuls jouissent de la propriété de former des composés semblables. Toutefois il est juste d'observer que le thallium, comme s'il devait toujours conserver quelque trait de ressemblance avec les métaux lourds, forme aussi deux ou trois phosphates très-peu solubles.

Voici d'autres propriétés aussi importantes que nombreuses :

Le protoxyde de thallium est très-soluble dans l'eau, fortement alcalin et caustique, comme la potasse : son carbonate, sel éminemment caractéristique, est soluble et alcalin à la façon du carbonate de potasse ; le sulfate de thallium possède la plupart des caractères du sulfate de potasse, et est isomorphe avec lui ; une analogie de propriétés et un isomorphisme plus absolus rapprochent l'alun de thallium et celui de potassium ; l'identité de composition et l'isomorphisme se poursuivent dans les autres aluns de thallium et dans les sulfates doubles de la série magnésienne, dans les bitartrates et les paratartrates.

Le thallium forme plusieurs composés doubles caractéristiques, dont le nombre s'accroît chaque jour à mesure qu'on étudie davantage ce curieux métal : un fluorure double avec le silicium, soluble et cristallisant dans le système régulier ; des chlorures, bromures, iodures doubles avec les chlorures, bromures, iodures alcalins, etc. Il n'engendre ni sous-acétate ni sous-nitrate ; mais son acétate, distillé avec l'acide arsénieux, donne du cacodyle comme l'acétate de potasse. S'il forme un protochlorure insoluble, il constitue par contre un fluorure hydraté et plusieurs chlorures supérieurs solubles. Enfin le thallium partage seul avec les métaux alcalins la propriété de donner naissance à des alcools éthylthallique, amylthallique et méthylthallique.

Nous laissons de côté bien d'autres caractères comme ayant une importance moindre, quoique non négligeable pourtant, tels que la rapide altération à l'air du nouvel élément ; son association, dans certaines eaux minérales, avec les métaux alcalins ; ses relations d'atomicité avec ceux-ci ; l'analogie observée entre ses sels organiques et les sels correspondants de potasse ; l'insolubilité du chlorure double qu'il forme avec le platine, etc., etc.

Certes, je suis loin de contester les traits de ressemblance du thallium et du plomb ; ils ont contribué à me rendre l'étude du thallium assez difficile pour que tout le premier je me sois empressé de les signaler. Mais, en m'appuyant sur les considérations qui précèdent, je ne m'en crois pas moins et plus que jamais autorisé à maintenir le thallium au rang que je lui ai primitivement assigné dans la classification.

NOTE HISTORIQUE.

Pour répondre aux prétentions de M. Crookes, nous avons dû, dans notre Mémoire inséré aux *Annales de la Société impériale des Sciences de Lille*, t. IX, 2^e série, 1862, et aux *Annales de Chimie et de Physique*, t. LXVII, 1863, rapporter des faits que ce chimiste n'a pas pu contester, parce qu'ils étaient l'expression de la vérité, et qui faisaient justice de ces prétentions. Nous ne voulions pas revenir sur cette question de priorité; mais M. Crookes ayant reproduit un historique de fantaisie dans diverses publications, et notamment dans une monographie du thallium qui a paru en avril et mai 1864 (*On Thallium, Journal of the Chemical Society*, 2^e série, vol. II), nous profiterons de cette occasion pour répondre une dernière fois.

Dans cette monographie, M. Crookes tranche la question de priorité par la phrase suivante : « Thallium was first obtained in a distinct metallic form by myself in september 1861, and was afterwards exhibited in the International Exhibition, may 1 1862, labelled *Thallium a new metallic element*. On the 16th of the same month, M. Lamy exhibited at the Imperial Society of Lille, etc. »

Évidemment cette phrase signifie : « Le thallium a été obtenu par moi sous une forme *métallique distincte* en septembre 1861, et a été ensuite exposé publiquement (sous cette forme *métallique distincte*, bien entendu) à l'Exposition universelle, le 1^{er} mai 1862, avec cette inscription : *Thallium, un nouvel élément métallique*. Le 16 du même mois, M. Lamy l'a montré à la Société impériale de Lille, etc. »

Or, toutes les personnes qui ont visité l'Exposition avant le 7 juin, époque de mon arrivée à Londres, ont vu, comme moi-même, que dans la petite vitrine de M. Crookes, il n'y avait sous le nom de *thallium, un nouvel élément*, que quelques centigrammes d'une poudre bien noire, qui faisait si peu soupçonner la nature métallique, que les membres de la deuxième classe du jury international, dont on ne peut certes pas contester la compétence, ne s'en étaient pas doutés eux-mêmes, et avaient résolu (je tiens le fait d'un des membres les plus éminents de la classe) de n'accorder aucune distinction aux résultats obtenus par M. Crookes, à cause de l'obscurité qui les enveloppait encore. Quand j'eus montré à M. Crookes un lingot de thallium sous un aspect métallique non équivoque, lorsque je lui eus indiqué, avec une franchise qu'il veut bien reconnaître, et la manière de l'obtenir et ses propriétés physiques essentielles, il ne lui était plus difficile de mettre dans sa vitrine du thallium avec sa forme métallique, et d'y ajouter toutes les inscriptions qu'il lui convenait.

En écrivant les lignes rapportées plus haut, M. Crookes avait oublié sans doute

qu'il s'était déjà chargé lui-même de les démentir à l'avance, dans une lettre au *Cosmos* en date du 30 octobre 1862. En effet, dans le but de répondre à cette objection capitale : « Puisque vous prétendez avoir connu bien avant M. Lamy la nature véritable du thallium, pourquoi n'en avez-vous pas parlé ? pourquoi n'avez-vous pas montré ce métal aussitôt que vous eûtes été informé que M. Lamy en avait apporté un lingot à Londres ? » M. Crookes a écrit qu'il possédait en effet bien avant moi un lingot de *thallium fondu, mais qu'il avait évité volontairement toute exhibition publique*, parce qu'il se croyait seul à la piste du nouvel élément et qu'il ambitionnait l'honneur de présenter avec un plus grand éclat à la Société Royale de Londres un Mémoire complet sur la matière (textuel : *Cosmos*, vol. II, p. 628, 1862).

Que croire en présence de ces deux affirmations contradictoires ? Évidemment les faits seuls qu'attestent des documents authentiques, incontestables. Il faut croire, ce que je me suis toujours empressé de reconnaître, que M. Crookes a le premier aperçu la raie verte caractéristique d'un nouvel élément, qu'il a donné à cet élément le nom de *thallium*; mais que, malgré de louables efforts, il n'a pu l'isoler complètement ni en déterminer la véritable nature, à cause sans doute de la trop minime quantité de matière première qu'il avait à sa disposition.

Après cela, M. Crookes me permettra de lui dire qu'il eût mieux agi dans l'intérêt de sa cause, en reconnaissant franchement le secours que je lui avais apporté, et la valeur que j'avais donnée à sa découverte, au lieu de communiquer à la Société Royale de Londres, quelques jours après notre entretien, sous le nom de *Recherches préliminaires sur le thallium*, une Note qui ne pouvait avoir, et n'a en réalité, aucune signification sérieuse sans mes révélations.

En effet, tout juge impartial qui voudra bien lire cette Note y trouvera : d'abord, des détails exacts relatifs à l'analyse spectrale; puis, les propriétés physiques caractéristiques du nouveau métal et son mode d'extraction par la pile électrique, que j'avais publiés plus d'un mois auparavant à la Société impériale des Sciences de Lille, et que j'avais répétés je ne sais combien de fois, soit à M. Crookes lui-même, soit aux nombreux physiciens et chimistes réunis à Londres à l'occasion de l'Exposition universelle; enfin, au milieu de quelques faits vrais, un ensemble de propriétés chimiques tellement vagues ou même opposées à la nature du thallium (telles qu'un acide soluble... qui n'existe pas; un sous-oxyde qui n'existe pas davantage; un carbonate insoluble, un cyanure insoluble, un protochlorure soluble, etc., etc.), qu'il est bien permis de croire que, même à cette époque, M. Crookes n'avait vu et tenu d'autre thallium vraiment métallique que celui que je lui avais mis dans les mains. Que pour s'édifier complètement le lecteur veuille ensuite comparer cette Note du 19 juin à ma communication du 23 à l'Académie des Sciences, communication qui, en définitive, qu'on le remarque bien, fut entre

les mains de M. Crookes avant l'apparition de ses *Recherches préliminaires*, soit dans le *Chemical News*, soit dans les *Proceedings of the Royal Society*.

Quant aux autres travaux de M. Crookes sur le thallium, ils sont tous postérieurs au Mémoire complet que j'ai présenté le 8 décembre 1862 à l'Académie des Sciences, et qui est inséré dans le tome IX, 2^e série, 1862, des *Annales de la Société impériale des Sciences de Lille*, et dans les *Annales de Chimie et de Physique*, numéro d'avril 1863.

Consulter à cet égard la Notice de M. Crookes lui-même : *On Thallium*, 2^e série, vol. II, p. 113.

Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. LAMY, relatif au thallium (1). Commissaires, MM. Pelouze, H. Sainte-Claire Deville, Dumas, rapporteur.

A l'origine des sociétés humaines, l'art de se procurer le feu à volonté, la culture du blé, l'extraction des premiers métaux étaient considérés comme des bienfaits si grands, que les inventeurs de ces procédés étaient placés au rang des dieux.

Aujourd'hui les métaux, en se multipliant, ont rendu la découverte de chaque nouveau corps simple de cette classe moins étonnante pour le commun des hommes, sans que l'intérêt qu'elle inspire au point de vue de la science en ait été diminué. Loin de là, à mesure que des métaux nouveaux sont signalés, les caractères qui leur appartiennent viennent par la comparaison jeter une vive lumière sur la valeur des caractères semblables ou opposés qu'on trouve dans les métaux anciens.

Dès que les travaux hardis et heureux de MM. Bunsen et Kirchhorff eurent mis hors de doute qu'en étudiant les produits naturels par l'analyse spectrale on pouvait y découvrir des traces de métaux que l'analyse ordinaire était impuissante à signaler, le rubidium et le césium furent considérés par tous les chimistes comme les deux premiers termes d'une longue suite de nouveaux éléments. Chacun comprit que les résidus de fabrique où se concentrent, par l'élimination des produits utiles et connus, des traces insaisissables de ces substances inutiles ou inconnues que la matière première exploitée renferme parfois, offraient aux recherches une mine profitable à exploiter.

Il est donc assez naturel que M. Crookes, en Angleterre, et M. Lamy, en France,

(1) Mémoire présenté à l'Académie des Sciences par M. Lamy le 8 octobre 1862, sous ce titre : *Nouvelles observations sur le thallium*, et rappelant en outre les faits contenus dans la communication de l'auteur du 23 juin 1862. (Note de la rédaction.)

aient soumis à l'analyse spectrale les produits de la combustion de ces pyrites de fer, qui ont pris, depuis peu d'années, pour une part si importante, la place du soufre de Sicile dans la fabrication de l'acide sulfurique, et il est facile de comprendre, quand on l'a vue, que la belle raie verte produite dans le spectre par le corps nouveau qui fait l'objet de ce Rapport ne leur ait échappé ni à l'un ni à l'autre.

Aussi n'est-ce point, à notre avis, ni par la nature du procédé mis en usage pour le reconnaître, ni par le milieu qui l'a fourni que se recommande le nouveau métal. L'analyse spectrale avait fait ses preuves, et les résidus de fabrique sont depuis longtemps signalés comme mines fécondes à exploiter. Mais le thallium est destiné à faire époque dans l'histoire de la Chimie par l'étonnant contraste qui se manifeste entre ses caractères chimiques et ses propriétés physiques. Il n'y a pas d'exagération à dire qu'au point de vue de la classification généralement acceptée pour les métaux, le thallium offre une réunion de propriétés contradictoires qui autoriserait à l'appeler le métal paradoxal, l'ornithorynque des métaux.

Nous n'arrêterons donc pas l'attention de l'Académie sur l'histoire de sa découverte. Personne ne conteste que M. Crookes ait vu le premier, dès le 30 mars 1861, la raie verte caractéristique du thallium dans les résidus de certains séléniums, et qu'il ne l'ait retrouvée dans les produits d'un échantillon de soufre de Lipari et dans ceux d'une pyrite d'Espagne, et qu'il n'ait signalé et nommé le thallium comme un corps simple nouveau.

Personne ne pourrait contester, d'autre part, que M. Lamy, de son côté, ait le premier isolé le thallium et établi par suite qu'il est, non point un métalloïde analogue au sélénium ou au tellure, comme le pensait M. Crookes, qui ne l'avait pas obtenu libre et pur, mais bien un vrai métal. Car M. Lamy annonçait sa découverte dès le 16 mai 1862 à la Société impériale de Lille, et mettait dès le 10 juin sous les yeux des membres du jury de Chimie, à Londres, un beau lingot de thallium, en présence de M. Crookes lui-même. Ce dernier aurait dû, selon l'usage, s'il avait des droits à conserver, conduire sur-le-champ les membres du jury dans son laboratoire, et leur livrer ses notes et ses produits, au lieu d'écouter, sans faire aucune réserve, la communication de M. Lamy, et de déposer huit jours après, à la Société Royale de Londres, une Note indiquant qu'il aurait eu connaissance depuis longtemps de la nature métallique du thallium et des propriétés essentielles de ce nouveau corps simple.

Le point d'histoire qui nous occupe, car en Chimie la découverte de chaque nouveau corps simple a sa légende ou son histoire, est donc réglé par deux dates authentiques : l'une du 30 mars 1861, où M. Crookes annonce l'existence d'un corps nouveau qu'il croit non métallique, caractérisé par une brillante raie verte ; l'autre du 16 mai 1862, où M. Lamy fait connaître le nouveau métal en qui se retrouve cette propriété et qui la possède seul.

C'est dans la fabrique d'acide sulfurique de notre savant confrère M. Kuhlmann, parmi les boues des chambres de plomb alimentées par des pyrites belges, que M. Lamy a découvert le thallium, et qu'il a pu le rencontrer en quantités assez considérables et sous une forme qui en rend l'extraction facile; car, à l'aide d'un petit nombre de manipulations, il peut être ramené à l'état de sulfate ou de chlorure, combinaison d'où le métal lui-même peut être facilement séparé par le zinc qui prend sa place et le précipite en cristaux à la manière du plomb.

L'Académie nous permettra de signaler à son attention l'importance que prennent dans des cas du genre de celui qui nous occupe des caractères absolus comme ceux que donne l'analyse spectrale. On va voir qu'il a fallu à M. Lamy, outre ses solides connaissances et sa pénétration naturelle, un guide aussi certain pour n'être pas dérouter dès les premiers pas dans cette étude.

En effet, si la raie verte n'eût pas été là pour constater sans cesse qu'on n'avait point affaire à du plomb ou à un alliage plombeux, que de raisons chimiques pour penser qu'il en était ainsi!

Ce métal, qui se sépare, comme le plomb, de ses dissolutions salines au moyen du zinc, présente l'apparence du plomb. Il en a presque la couleur, se raye comme lui et se coupe de même. Il produit sur le papier une trace analogue à celle du plomb. Il a la même densité que lui et le même point de fusion à peu près. Il possède la même chaleur spécifique. Ses dissolutions précipitent en noir par l'hydrogène sulfuré, en jaune par les iodures, en jaune par les chromates, en blanc par les chlorures, comme celles du plomb.

N'hésitons donc pas à dire que sans le secours de l'analyse spectrale ce curieux et important métal eût facilement été méconnu; que, même avec ce secours, il était facile de s'y méprendre, et que M. Lamy a fait preuve d'une grande sagacité, lorsqu'il a rangé sans hésitation un métal qui ressemble au plomb par tant de propriétés essentielles, à côté des métaux alcalins, du potassium et du sodium auxquels il ressemble si peu.

Le thallium, dont nous avons étudié les principales propriétés, est un métal parfait, doué au plus haut degré de l'éclat métallique, soit lorsqu'on en examine une coupure fraîche, soit lorsqu'on le prend en lingots fortement chauffés dans l'hydrogène et refroidis dans ce gaz. Il est moins bleu que le plomb, moins blanc que l'argent, et se rapproche plutôt pour sa teinte de l'étain ou de l'aluminium que de tout autre métal.

A la température de 100 degrés, il se ramollit. De nouveaux arrangements dus à la cristallisation se produisent dans les lingots qu'on maintient pendant quelque temps à cette température; ils se manifestent, comme l'a vu M. Regnault, par l'apparition d'un beau moiré qui se produit quand on les trempe dans l'eau. Celle-ci décape la surface des lingots à la manière des acides.

Chauffé au chalumeau, le thallium présente des phénomènes caractéristiques. Il fond rapidement et s'oxyde en répandant une fumée sans odeur, ou qui rappelle seulement l'odeur du noir de fumée, blanchâtre par moments, mais mêlée de tons rougeâtres ou violets. Il continue à fumer longtemps, même après qu'on a cessé de le chauffer. Quand on laisse refroidir le globule principal, on le retrouve entouré de petites gouttelettes de métal volatilisé.

Dans un tube fermé par un bout, il fond à la flamme de la lampe à alcool, s'oxyde rapidement et fournit un oxyde qui à chaud rappelle l'aspect des rubines, et qui refroidi se rapproche davantage de certaines litharges : c'est le protoxyde de thallium uni à la silice du verre.

Dans un tube ouvert aux deux bouts et muni d'un renflement, si l'on chauffe un globule du métal à la lampe à alcool, en tenant le tube incliné pour favoriser le passage de l'air, on voit bientôt le métal fondre, s'oxyder en formant la couche brune ordinaire d'oxyde fondu, mais, de plus, en émettant une abondante fumée qui se condense en partie à peu de distance du renflement en une poussière amorphe rougeâtre ou violette.

Quand on place un globule de métal dans une coupelle chauffée au rouge, et qu'on plonge celle-ci dans l'oxygène, le métal brûle vivement avec éclat et s'oxyde en donnant naissance à un oxyde fondu qui présente une apparence scoriforme et qui pénètre dans la pâte de la coupelle. C'est du peroxyde de thallium, ou un mélange de protoxyde et de peroxyde.

M. Lamy a reconnu que le thallium peut former deux oxydes : le protoxyde, base analogue à la potasse soluble et fortement alcaline ; le peroxyde, qui donne de l'oxygène sous l'influence des acides à chaud, et qui peut se convertir en un chlorure abandonnant, par la chaleur, une partie de son chlore.

Les chimistes remarqueront que le protoxyde de thallium, qui correspond à la potasse, loin d'avoir comme cet alcali une affinité puissante pour l'eau, perd son eau avec la plus grande facilité par la chaleur ou même à froid dans le vide. Il reste un oxyde anhydre rougeâtre, tandis que l'oxyde hydraté est blanc jaunâtre. Du reste, l'oxyde s'hydrate ou se déshydrate avec la même facilité.

Les chimistes remarqueront encore que le peroxyde de thallium n'a donné aucun signe de la formation de l'eau oxygénée dans les expériences auxquelles M. Lamy l'a soumis.

Le thallium brûle dans le chlore sec, il se combine à chaud avec le brome et l'iode sans production de lumière, mais avec dégagement de chaleur ; il forme trois chlorures dont l'un correspond au sel marin, l'autre au sesquichlorure de fer, le troisième est un bichlorure qui correspond au sublimé corrosif. Le protochlorure est blanc, fusible, peu soluble, et, préparé par la voie humide, se précipite en gros et lourds flocons à la façon du chlorure d'argent. Le thallium peut former

encore des chlorures supérieurs au bichlorure, mais leur composition n'est pas définie.

Le protobromure et le protoiodure ont seuls été étudiés. Ils ressemblent aux composés correspondants du plomb.

Le cyanure de thallium est soluble. Cependant il se forme un précipité cristallin de ce produit quand on mêle les dissolutions concentrées de cyanure de potassium et d'un sel de thallium.

Le sulfure de thallium, qui s'obtient par précipitation, est brun noir. Il ressemble au sulfure de plomb. Toutefois il s'oxyde plus aisément à l'air et se convertit en sulfate incolore et soluble.

Le thallium est très-lentement attaqué par l'acide chlorhydrique même concentré et bouillant. Il l'est au contraire rapidement par l'acide nitrique et par l'acide sulfurique; ce dernier, concentré et chaud, le dissout avec une rapidité qui contraste avec la lenteur qu'il met à attaquer le plomb.

Relativement à l'action des acides, le thallium offre d'ailleurs une opposition complète de caractères avec l'un des derniers venus de la série des métaux, l'aluminium, ce dernier étant dissous vivement par l'acide chlorhydrique qui n'attaque pas le premier, et résistant à l'acide nitrique qui dissout facilement le thallium.

Le thallium, à l'état de protoxyde, forme avec les acides carbonique, azotique, sulfurique et phosphorique, des sels solubles et cristallisables. Le carbonate est un sel très-caractéristique.

Les sels formés par le protoxyde de thallium avec les acides organiques, qui ont été étudiés par M. Kuhlmann fils, sont l'oxalate et le bioxalate, le tartrate, le paratartrate, le malate, le citrate, le formiate, l'acétate et quelques autres moins importants; tous ces sels sont solubles, et quelques-uns, d'après M. de la Provostaye, sont isomorphes avec les sels de potasse correspondants.

Le thallium est donc un métal nouveau bien caractérisé.

Il se distingue de tous les autres corps réputés simples par la belle raie verte qu'il fournit à l'analyse spectrale, et qui correspond au n° 1442 du spectre type publié dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, par M. Kirchhoff.

On pourrait conclure de l'examen du spectre solaire que le thallium ne fait pas partie des éléments qu'on a reconnus dans la constitution de l'atmosphère du soleil.

Le thallium fait indubitablement partie de la famille des métaux alcalins, dont le nombre, par les découvertes récentes et par celle de ce corps important, se trouve doublé. Au commencement du siècle, on ne connaissait que deux de ces métaux, le potassium et le sodium, auxquels le lithium était venu s'ajouter il y a quarante ans. Depuis trois ans, il a été découvert trois métaux nouveaux de cette famille, le

rubidium, le césium et le thallium enfin, tous les trois signalés par l'analyse spectrale.

Il est bien permis d'espérer d'après cela que le nombre de ces métaux et celui des métaux en général est destiné à recevoir de l'emploi de ces nouvelles méthodes analytiques une extension considérable et rapide, de nature à encourager toutes les recherches.

Parmi les métaux alcalins, le thallium se place à l'extrémité opposée d'une échelle dont le lithium constitue le premier terme et dont les poids équivalents marquent les divers degrés. Ces poids sont en effet les suivants :

Lithium.....	7
Sodium.....	23
Potassium.....	39
Rubidium.....	85
Césium.....	123
Thallium.....	204

Il a été remarqué à ce sujet :

1° Que l'équivalent du sodium est exactement la moyenne des équivalents du potassium et du lithium : $\frac{39 + 7}{2} = 23$;

2° Qu'en ajoutant le double du poids du sodium au poids du potassium, on obtient le poids du rubidium : $46 + 39 = 85$;

3° Qu'en ajoutant le double du poids du sodium au double du poids du potassium, on obtient à peu près le poids du césium : $46 + 78 = 124$;

4° Qu'en ajoutant le double du poids du sodium au quadruple du potassium, on obtient à peu près le poids du thallium : $46 + 156 = 202$.

Ces considérations sont de nature à appeler l'attention des chimistes, et sans leur attribuer une valeur trop absolue, que les chiffres actuels ne justifieraient pas, elles montrent de nouveau tout l'intérêt qui s'attache à la comparaison attentive des équivalents des corps appartenant aux mêmes familles.

Les métaux alcalins présentent cette particularité que, pour les faire rentrer dans la loi de Dulong et Petit, c'est-à-dire pour obtenir que les chaleurs atomiques de ces corps fussent égales aux chaleurs atomiques des autres métaux, il a été nécessaire de réduire de moitié les poids qui leur étaient attribués. Le thallium n'échappe point à cette règle. Son équivalent serait égal à 204; mais sa chaleur spécifique, déterminée par M. Regnault, dont nous joignons une Note à ce sujet au présent Rapport (1), étant égale à 0,03355, il faudrait réduire son atome à 102.

(1) Voir, p. 143, la Note de M. Regnault sur la chaleur spécifique du thallium.

De même que la potasse a pour formule atomique



le protoxyde de thallium aurait pour formule



Le volume atomique de ce métal serait égal à 8,5, et si on ne le compare point aux volumes atomiques du potassium et du sodium, c'est que ceux-ci offrent des anomalies extraordinaires qui n'ont point jusqu'ici appelé suffisamment la méditation des chimistes.

Bornons-nous à remarquer que la série des métaux alcalins actuellement connue présente un corps qui possède un équivalent si léger, qu'il prend place près de l'hydrogène, c'est-à-dire le lithium, et un corps, le thallium, qui offre un équivalent si lourd, qu'il se range à côté du bismuth, métal qui possède le plus pesant des équivalents.

On le voit, le cercle de nos connaissances ne s'étend pas seulement par la découverte de ces corps nouveaux, en raison des faits dont ils enrichissent la science pratique, mais surtout en raison des vues que leur étude révèle, des lois qu'elle fait pressentir, et de cet aspect plus libre et plus général sous lequel elle nous apprend à envisager les propriétés des êtres, leurs analogies, leurs différences, leur classification et même leur nature et leur essence.

Par ces motifs, et en prenant en considération les difficultés vaincues par l'auteur, la netteté de ses résultats et leur importance, nous avons l'honneur de proposer à l'Académie de décider que son Mémoire fera partie du *Recueil des Savants étrangers*.

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

Sur la chaleur spécifique du thallium; Note de M. REGNAULT mentionnée dans le Rapport de M. DUMAS.

Voici le résultat des expériences :

I.	0,03349
II.	0,03361
Moyenne.	0,03355

Si l'on suppose l'équivalent

$$= 204 = 2550,$$

on trouve pour le produit par la chaleur spécifique

85,55,

dont la moitié est

42,77.

Ainsi la formule de l'oxyde de thallium est

Tl_2O ,

comme celle des alcalis.

La chaleur spécifique trouvée est un peu trop forte, parce que le thallium à 100 degrés s'oxyde sensiblement à la surface; il se recouvre d'une pellicule jaunâtre qui se détache dans l'eau et rend celle-ci légèrement laiteuse. La réaction de l'eau est franchement alcaline. La combinaison de l'oxyde avec l'eau doit dégager un peu de chaleur.

Après ce décapage, le thallium présente un moiré métallique très-brillant.



SUR LA DÉMONSTRATION
DE LA
FORMULE FONDAMENTALE DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE,

PAR FEU M. P.-H. BLANCHET,
ANCIEN MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
INSPECTEUR GÉNÉRAL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE (*).

I.

On sait comment, dans sa *Théorie des phénomènes électrodynamiques*, Ampère établit la formule qui représente l'action réciproque de deux éléments de courant. En partant du principe des courants sinueux et de quelques propriétés générales des courants, faciles à constater par l'expérience, il démontre d'abord que l'action élémentaire dont il s'agit peut être considérée comme la somme de l'action réciproque de deux éléments de courant situés sur le prolongement l'un de l'autre, et de l'action réciproque de deux éléments de courant contenus dans le même plan et perpendiculaires à la droite qui joint leurs milieux. Ensuite il admet que ces deux actions varient l'une et l'autre en raison inverse d'une même puissance de la distance, et que, à égalité de distances et à égalité des éléments réagissants, elles offrent l'une avec l'autre un rapport constant, et il détermine la valeur numérique de ce rapport ainsi que l'exposant indéterminé de la distance par la considération de quelques cas d'équilibre donnés par l'observation.

On peut, en modifiant la marche des calculs, faire disparaître quelques-unes des restrictions dont cette méthode est affectée et retrouver la formule fondamentale

(*) Je reproduis ici, d'après mes propres souvenirs et d'après ceux de quelques condisciples, notamment M. Simon, professeur au lycée Saint-Louis, une démonstration de la formule fondamentale de l'électrodynamique, plus générale que celle d'Ampère, que M. Blanchet a exposée plusieurs fois dans son enseignement de l'École Normale, de 1842 à 1848, mais qu'il n'a jamais publiée.

E. VERDET.

de l'électrodynamique, sans supposer d'avance que les deux forces, dont l'action élémentaire électrodynamique est la résultante, sont inversement proportionnelles à une même puissance de la distance.

II.

Lorsqu'on ne fait pas cette hypothèse, on doit représenter l'action réciproque de deux éléments de courant par la formule

$$ii' ds ds' [f(r) \cos \theta \cos \theta' + F(r) \sin \theta \sin \theta' \cos \omega],$$

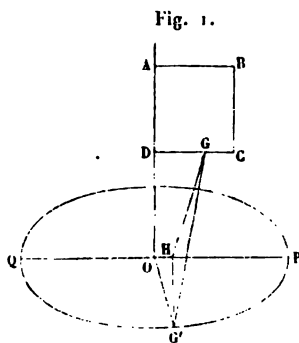
où les diverses lettres ont la même signification que dans la *Théorie des phénomènes électrodynamiques*, et la question est de déterminer les fonctions $f(r)$ et $F(r)$ par la considération de deux cas d'équilibre.

Les plus faciles à constater avec certitude, parmi ceux qu'Ampère et Savary ont successivement fait servir à l'établissement de la formule fondamentale sont les suivants :

- 1° *Un courant rectangulaire, qui ne peut que tourner autour d'un de ses côtés, demeure immobile sous l'action d'un courant circulaire qui a son centre sur l'axe de rotation et son plan perpendiculaire à cet axe;*
- 2° *L'action d'un solénoïde fermé sur un élément de courant est nulle.*

III.

Il résulte du premier cas d'équilibre que, si l'on prend par rapport à l'axe de rotation les moments des actions exercées sur les trois côtés du rectangle mobile qui ne coïncident pas avec cet axe, la somme de ces moments est égale à zéro.



Soit en particulier l'action de l'élément fixe ds' dont le milieu est en G' sur l'élément mobile ds dont le milieu est en G (*fig. 1*): le moment de cette force par

rapport à l'axe de rotation est égal au produit de la distance $DG = u$ du milieu de l'élément ds à l'axe et de la composante perpendiculaire au plan ABCD, c'est-à-dire à

$$ii' ds ds' u \cos \tau [f(r) \cos \theta \cos \theta' + F(r) \sin \theta \sin \theta' \cos \omega],$$

τ désignant l'angle de la droite GG' avec une perpendiculaire au plan ABCD. Si du point G' on abaisse une perpendiculaire $G'H$ sur le diamètre du cercle PQ qui est contenu dans le plan ABCD, l'angle τ étant l'angle $GG'H$. la considération du triangle $GG'H$ donne

$$\cos \tau = \frac{G'H}{GG'} = \frac{a \sin q}{r},$$

si l'on désigne par a le rayon du cercle et par q l'angle POG' . Enfin, si l'on appelle ε l'angle des deux éléments l'un avec l'autre et qu'on ait égard à la relation connue

$$\cos \varepsilon = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \omega,$$

on déduit de l'équilibre observé la condition analytique

$$\iint a ii' ds ds' \frac{u \sin q}{r} \{ [f(r) - F(r)] \cos \theta \cos \theta' + F(r) \cos \varepsilon \} = 0,$$

les intégrales étant étendues au cercle entier et aux trois côtés AB, BC, CD.

IV.

Occupons-nous d'abord du premier terme de l'intégrale, c'est-à-dire, en négligeant les facteurs constants, de

$$\iint ds ds' \frac{u \sin q}{r} [f(r) - F(r)] \cos \theta \cos \theta'.$$

On déduit de

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

$$\frac{dr}{ds} = \frac{x - x'}{r} \frac{dx}{ds} + \frac{y - y'}{r} \frac{dy}{ds} + \frac{z - z'}{r} \frac{dz}{ds} = \cos \theta,$$

$$\frac{dr}{ds'} = -\frac{x - x'}{r} \frac{dx'}{ds} - \frac{y - y'}{r} \frac{dy'}{ds} - \frac{z - z'}{r} \frac{dz'}{ds} = -\cos \theta'.$$

En substituant $\frac{dr}{ds}$ à $\cos \theta$, divisant et multipliant par r , et intégrant relativement

à s , on trouve

$$\int \frac{f(r) - F(r)}{r^2} \frac{dr}{ds} ds u r \cos \theta' = \left[\frac{\psi(r)}{r} u r \cos \theta' \right]_1^2 - \int \frac{\psi(r)}{r} \frac{d(ur \cos \theta')}{ds} ds,$$

si l'on fait

$$\frac{f(r) - F(r)}{r^2} = \frac{d \cdot \frac{\psi(r)}{r}}{dr}.$$

Comme d'ailleurs u est nul aux deux extrémités du conducteur ABCD, le premier terme du second membre de la formule s'évanouit (*), et il ne reste à considérer que l'intégrale

$$- \int \frac{\psi(r)}{r} \frac{d(ur \cos \theta')}{ds} ds.$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{d(ur \cos \theta')}{ds} &= r \cos \theta' \frac{du}{ds} + u \left(\cos \theta' \frac{dr}{ds} + r \frac{d \cos \theta'}{ds} \right) \\ &= r \cos \theta' \frac{du}{ds} - u \left(\frac{dr}{ds'} \frac{dr}{ds} + r \frac{d^2 r}{ds ds'} \right), \end{aligned}$$

et il n'est pas difficile de voir que

$$\frac{dr}{ds'} \frac{dr}{ds} + r \frac{d^2 r}{ds ds'} = - \left(\frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} \right) = -\cos \varepsilon;$$

donc

$$- \int \frac{\psi(r)}{r} \frac{d(ur \cos \theta')}{ds} ds = - \int \frac{\psi(r)}{r} \left(u \cos \varepsilon + r \cos \theta' \frac{du}{ds} \right) ds.$$

Enfin, si l'on prend le point D pour origine des arcs s , le point P pour origine des arcs s' , et qu'on appelle l la longueur DCBA, d la longueur DC, on a :

$$\begin{aligned} \text{de D en C} \dots \dots \cos \varepsilon &= -\sin q, & u &= s, & \frac{du}{ds} &= 1; \\ \text{de C en B} \dots \dots \cos \varepsilon &= 0, & u &= d, & \frac{du}{ds} &= 0; \\ \text{de B en A} \dots \dots \cos \varepsilon &= +\sin q, & u &= l-s, & \frac{du}{ds} &= -1. \end{aligned}$$

(*) Cette conclusion ne serait en défaut que si $\frac{\psi(r)}{r}$ était infini pour toute valeur de r , ce qui est évidemment impossible.

En outre, si l'on appelle h la hauteur de l'élément ds au-dessus du plan du courant circulaire, on a

$$r^2 = h^2 + (u - a \cos q)^2 + a^2 \sin^2 q = a^2 + h^2 + u^2 - 2au \cos q;$$

d'où, en différentiant par rapport à s' ,

$$r \frac{dr}{ds'} = -r \cos \theta' = au \sin q \frac{dq}{ds'},$$

c'est-à-dire, puisque, en vertu de la convention faite sur l'origine des arcs s' , $q = \frac{s'}{a}$,

$$r \cos \theta' = -u \sin q.$$

Si l'on a égard à ces diverses relations, l'intégrale cherchée se réduit en définitive à

$$2 \sin q \left[\int_0^d \frac{\psi(r)}{r} u du + \int_d^0 \frac{\psi(R)}{R} u du \right],$$

r désignant la distance d'un élément ds' à un élément ds pris sur le côté DC, et R la distance du même élément à un élément ds pris sur le côté BA.

En rétablissant les facteurs constants supprimés plus haut et indiquant la deuxième intégration, on obtient l'expression définitive

$$2a ii' \int_0^{2\pi a} \sin^2 q ds' \int_0^d \left(\frac{\psi(r)}{r} - \frac{\psi(R)}{R} \right) u du.$$

Des transformations toutes semblables démontrent que

$$2a ii' \iint ds ds' \frac{u \sin q}{r} F(r) \cos \epsilon = -a ii' \int_0^{2\pi a} \sin^2 q ds' \int_0^d \left(\frac{F(r)}{r} - \frac{F(R)}{R} \right) u du.$$

V.

Si l'on réunit ces deux expressions, qu'on y remplace ds' par adq , et que, conformément à l'expérience, on égale à zéro la valeur de la somme des moments des forces par rapport à l'axe de rotation, on a l'équation de condition

$$a ii' \int_0^{2\pi} \int_0^d \left[\left(2 \frac{\psi(r)}{r} - \frac{F(r)}{r} \right) - \left(2 \frac{\psi(R)}{R} - \frac{F(R)}{R} \right) \right] u \sin^2 q du dq = 0,$$

et il est facile de démontrer que cette équation ne peut être satisfaite que si l'on a

$$2 \frac{\psi(r)}{r} - \frac{F(r)}{r} = \text{constante.}$$

Supposons en effet que cette expression soit variable, et que, de $r=r_0$ à $r=r_0+h$, elle soit constamment croissante avec r . Il sera toujours possible de donner au courant circulaire et au courant rectangulaire de l'expérience des dimensions telles, que pour tous les points de DC et de AB les valeurs de r et de R soient comprises entre r_0 et r_0+h (*). r étant plus petit que R pour une valeur donnée des variables u et q , le facteur

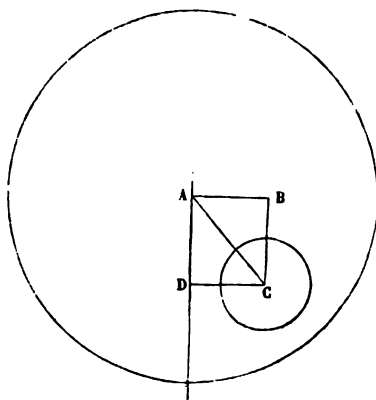
$$\left\{ \left[\frac{2\psi(r)}{r} - \frac{F(r)}{r} \right] - \left[\frac{2\psi(R)}{R} - \frac{F(R)}{R} \right] \right\}$$

sera positif dans toute l'étendue de l'intégrale; le facteur $u \sin^2 q du dq$ étant lui-même positif, l'intégrale aura une valeur positive finie et la somme des moments des forces par rapport à l'axe de rotation ne sera pas nulle, ce qui est contraire à l'expérience.

On prouverait de même que l'expression dont il s'agit ne saurait être décroissante entre deux limites données; elle est donc constante.

(*) Soit en effet ABCD (fig. 2) le conducteur rectangulaire mobile; les valeurs de r et de R seront comprises entre r_0 et r_0+h si le conducteur circulaire est extérieur à la sphère de rayon r_0 qui a pour

Fig. 2.



centre le point C, et intérieur à la sphère du rayon r_0+h qui a pour centre le point A. Cette condition pourra toujours être satisfaite si la première sphère est intérieure à la deuxième, c'est-à-dire si l'on donne au conducteur rectangulaire des dimensions telles, que la diagonale AC soit plus petite que h .

Ainsi,

$$\frac{2\psi(r)}{r} - \frac{F(r)}{r} = \text{const.}$$

Donc, en différentiant,

$$2 \frac{d \cdot \frac{\psi(r)}{r}}{dr} = \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr},$$

c'est-à-dire

$$2 \frac{f(r) - F(r)}{r^2} = - \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr}.$$

Cette relation permet d'éliminer $f(r)$ et de représenter l'action réciproque de deux éléments de courant par

$$ii' ds ds' \left[\frac{1}{2} r^2 \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} \cos \theta \cos \theta' + F(r) \cos \epsilon \right].$$

La détermination de $F(r)$ résulte de la considération du deuxième cas d'équilibre.

VI.

Considérons d'abord l'action d'un courant fermé dont l'élément est ds sur un élément de courant ds' que, pour simplifier les formules, nous supposons placé à l'origine des coordonnées. La composante parallèle aux x de cette action est

$$ii' ds' \int \left[\frac{1}{2} r^2 \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} \cos \theta \cos \theta' + F(r) \cos \epsilon \right] \frac{x}{r} ds,$$

c'est-à-dire, en remplaçant $\cos \theta$ par $\frac{dr}{ds}$ et intégrant par parties le premier terme de l'expression différentielle,

$$ii' ds' \left[\frac{1}{2} \frac{F(r)}{r} xr \cos \theta' \right]_1^2 - ii' ds' \frac{1}{2} \int \frac{F(r)}{r} \frac{d \cdot xr \cos \theta'}{ds} ds + ii' ds' \int F(r) \cos \epsilon \frac{x}{r} ds.$$

Le courant étant fermé, le premier terme de cette expression est nul, et comme on a

$$\frac{d \cdot xr \cos \theta'}{ds} = \frac{dx}{ds} r \cos \theta' + x \frac{d \cdot r \cos \theta'}{ds} = \frac{dx}{ds} r \cos \theta' + x \cos \epsilon,$$

les deux autres termes se réduisent à

$$\frac{1}{2} i i' ds' \int \frac{F(r)}{r} \left(x \cos \epsilon - r \cos \theta' \frac{dx}{ds} \right) ds.$$

On a donc, en appelant $\dot{X} ds'$ la composante cherchée,

$$X ds' = \frac{1}{2} i i' ds' \int \frac{F(r)}{r} \left(x \cos \epsilon - r \cos \theta' \frac{dx}{ds} \right) ds$$

Semblablement, on trouve pour les composantes parallèles aux y et aux z :

$$Y ds' = \frac{1}{2} i i' ds' \int \frac{F(r)}{r} \left(y \cos \epsilon - r \cos \theta' \frac{dy}{ds} \right) ds,$$

$$Z ds' = \frac{1}{2} i i' ds' \int \frac{F(r)}{r} \left(z \cos \epsilon - r \cos \theta' \frac{dz}{ds} \right) ds.$$

Mais en appelant λ, μ, ν les angles que fait la direction de l'élément ds' avec les axes des coordonnées, on a

$$\cos \theta' = \frac{x}{r} \cos \lambda + \frac{y}{r} \cos \mu + \frac{z}{r} \cos \nu,$$

$$\cos \epsilon = \frac{dx}{ds} \cos \lambda + \frac{dy}{ds} \cos \mu + \frac{dz}{ds} \cos \nu,$$

et par conséquent

$$x \cos \epsilon - r \cos \theta' \frac{dx}{ds} = \left(x \frac{dz}{ds} - z \frac{dx}{ds} \right) \cos \nu + \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) \cos \mu,$$

$$y \cos \epsilon - r \cos \theta' \frac{dy}{ds} = \left(y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds} \right) \cos \lambda + \left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} \right) \cos \nu,$$

$$z \cos \epsilon - r \cos \theta' \frac{dz}{ds} = \left(z \frac{dy}{ds} - y \frac{dz}{ds} \right) \cos \mu + \left(z \frac{dx}{ds} - x \frac{dz}{ds} \right) \cos \lambda.$$

Donc, en faisant

$$A = \int \frac{F(r)}{r} (y dz - z dy),$$

$$B = \int \frac{F(r)}{r} (z dx - x dz),$$

$$C = \int \frac{F(r)}{r} (x dy - y dx),$$

$$X ds' = \frac{1}{2} ii' ds' (C \cos \mu - B \cos \nu),$$

$$Y ds' = \frac{1}{2} ii' ds' (A \cos \nu - C \cos \lambda),$$

$$Z ds' = \frac{1}{2} ii' ds' (B \cos \lambda - A \cos \mu).$$

Il résulte immédiatement de ces expressions que l'on a

$$X \cos \lambda + Y \cos \mu + Z \cos \nu = 0,$$

et

$$AX + BY + CZ = 0.$$

La première relation fait voir que la résultante des actions exercées par le courant fermé sur l'élément ds' est perpendiculaire à l'élément de courant.

La seconde fait voir que cette même résultante est perpendiculaire à la droite qui fait avec les axes des angles ayant respectivement pour cosinus

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Le plan mené par l'élément de courant et par la droite qui vient d'être définie est le *plan directeur* d'Ampère.

VII.

Soit u la projection de la distance r sur le plan xy , φ l'angle de cette projection avec l'axe des x , on a

$$u^2 d\varphi = ydx - xdy,$$

et par suite

$$C = \int \frac{F(r)}{r} u^2 d\varphi.$$

Supposons que l'origine des coordonnées soit en dehors de la projection du circuit fermé sur le plan xy (et il en sera toujours ainsi si le circuit fermé est un des circuits infiniment petits d'un solénoïde situé à distance finie de l'élément ds' , qui ne rencontre aucun des axes), à chaque valeur de φ répondront deux valeurs de u , pour lesquelles l'accroissement infinitésimal $d\varphi$ aura des valeurs égales et de signes contraires. En appelant u_1 et u_2 ces deux valeurs, r_1 et r_2 les valeurs correspon-

P et N on mène des parallèles à OM, la comparaison du triangle infinitésimal NN'H et du triangle fini PNQ donne

$$\frac{N'H}{NH} = \frac{NQ}{PQ},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dz}{du} = \frac{z - OP}{u}.$$

Si maintenant par le point N on mène le plan tangent à la surface dont il vient d'être question, ce plan contiendra la droite NN', et, par conséquent, viendra rencontrer l'axe des z au point P, en sorte que si l'on représente d'une manière générale l'équation du plan par

$$\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma = p,$$

on aura

$$OP = \frac{p}{\cos \gamma}.$$

Donc, en définitive,

$$\frac{dz}{du} = \frac{z \cos \gamma - p}{u \cos \gamma},$$

$$\frac{dr}{du} = \frac{u}{r} + \frac{z(z \cos \gamma - p)}{ur \cos \gamma} = \frac{r^2 \cos \gamma - pz}{ur \cos \gamma},$$

$$\begin{aligned} C &= - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{u_1}^{u_2} \left[u^2 \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} \left(\frac{r^2 \cos \gamma - pz}{ur \cos \gamma} \right) + 2u \frac{F(r)}{r} \right] du d\varphi \\ &= - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{u_1}^{u_2} \left\{ \left[r \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} + \frac{2F(r)}{r} \right] \cos \gamma - \frac{pz}{r} \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} \right\} \frac{u du d\varphi}{\cos \gamma}, \end{aligned}$$

p désignant la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan de l'élément qui a pour projection sur le plan xy l'élément $u du d\varphi$, et γ l'angle de cette perpendiculaire avec l'axe des z .

On trouverait pour B et A des expressions analogues qu'il est inutile d'écrire.

VIII.

Si le courant fermé est infiniment petit, les quantités r , x , y , z , α , β , γ , p peuvent être regardées comme des constantes dans toute son étendue, et $\frac{1}{\cos \gamma} \iint u du d\varphi$ est égal à l'aire ω de la surface plane circonscrite par le cou-

rant. On a donc

$$\begin{aligned} C &= -\omega \left\{ \left[r \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} + 2 \frac{F(r)}{r} \right] \cos \gamma - \frac{pz}{r} \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} \right\}, \\ B &= -\omega \left\{ \left[r \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} + 2 \frac{F(r)}{r} \right] \cos \beta - \frac{py}{r} \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} \right\}, \\ A &= -\omega \left\{ \left[r \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} + 2 \frac{F(r)}{r} \right] \cos \alpha - \frac{px}{r} \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} \right\}. \end{aligned}$$

IX.

Soit maintenant un système de courants fermés infiniment petits et infiniment rapprochés, égaux et équidistants, et normaux à une *courbe directrice* dont on représente les éléments par $d\sigma$. Si g est la distance de deux courants successifs, de façon qu'on puisse représenter par $\frac{d\sigma}{g}$ le nombre des courants normaux à l'élément $d\sigma$, l'action exercée par ce *solénoïde* sur l'élément ds' , placé à l'origine des coordonnées, aura pour composantes parallèles aux axes

$$\begin{aligned} X ds' &= \frac{1}{2} i' ds' \frac{i\omega}{g} \left(\cos \mu \int \frac{C d\sigma}{\omega} - \cos \nu \int \frac{B d\sigma}{\omega} \right), \\ Y ds' &= \frac{1}{2} i' ds' \frac{i\omega}{g} \left(\cos \nu \int \frac{A d\sigma}{\omega} - \cos \lambda \int \frac{C d\sigma}{\omega} \right), \\ Z ds' &= \frac{1}{2} i' ds' \frac{i\omega}{g} \left(\cos \lambda \int \frac{B d\sigma}{\omega} - \cos \mu \int \frac{A d\sigma}{\omega} \right). \end{aligned}$$

L'expérience prouve que lorsque la courbe directrice du solénoïde est une courbe fermée, l'action est nulle. On a donc, dans cette hypothèse,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

et, par suite,

$$\int \frac{C d\sigma}{\omega} = 0, \quad \int \frac{B d\sigma}{\omega} = 0, \quad \int \frac{A d\sigma}{\omega} = 0.$$

Mais on a en général, en remarquant que d'après la définition de la courbe directrice $\cos \gamma = \frac{dz}{d\sigma}$, $\frac{p}{r} = \frac{dr}{d\sigma}$,

$$\frac{C}{\omega} = - \left[r \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} + 2 \frac{F(r)}{r} \right] \frac{dz}{d\sigma} + z \frac{dr}{d\sigma} \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr},$$

et, en intégrant par parties le dernier terme seulement,

$$\begin{aligned}\int \frac{C}{\omega} ds &= - \int \left[r \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} + 2 \frac{F(r)}{r} \right] \frac{dz}{d\sigma} d\sigma + \left[z \frac{F(r)}{r} \right]_1 - \int \frac{F(r)}{r} \frac{dz}{d\sigma} d\sigma \\ &= - \int \left[r \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} + 3 \frac{F(r)}{r} \right] \frac{dz}{d\sigma} d\sigma + \left[z \frac{F(r)}{r} \right]_1.\end{aligned}$$

Le terme en dehors du signe $\int$ se réduit à zéro lorsque le solénoïde est fermé, et il reste les trois relations suivantes :

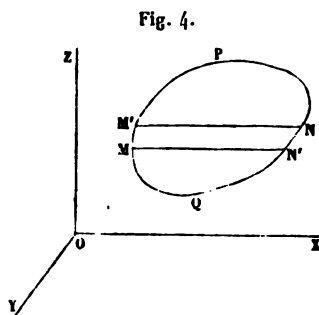
$$\begin{aligned}\int \left[r \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} + 3 \frac{F(r)}{r} \right] \frac{dz}{d\sigma} d\sigma &= 0, \\ \int \left[r \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} + 3 \frac{F(r)}{r} \right] \frac{d\gamma}{d\sigma} d\sigma &= 0, \\ \int \left[r \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} + 3 \frac{F(r)}{r} \right] \frac{dx}{d\sigma} d\sigma &= 0.\end{aligned}$$

X.

Ces trois relations sont satisfaites si l'on a, le solénoïde étant fermé,

$$r \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} + 3 \frac{F(r)}{r} = \text{const.},$$

et l'on peut démontrer que cette condition, qui est évidemment suffisante, est



nécessaire. Soit en effet MNPQ (*fig. 4*) la courbe directrice du solénoïde; soient

MM' et NN' deux éléments de cette courbe compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe des z infiniment voisins; pour ces deux éléments les valeurs de $\frac{dz}{d\sigma}d\sigma$ seront égales et de signe contraire. Si l'on appelle r la distance du point M à l'origine, R celle du point N, z_1 et z_2 la plus petite et la plus grande valeur de z pour la courbe directrice, la première des trois relations qu'on vient d'établir pourra se mettre sous la forme

$$\int_{z_1}^{z_2} \left[r \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} + 3 \frac{F(r)}{r} - R \frac{d \cdot \frac{F(R)}{R}}{dR} - 3 \frac{F(R)}{R} \right] dz = 0,$$

et l'on prouvera, comme on l'a fait plus haut dans un cas analogue, que le multiplicateur de dz est nécessairement nul.

XI.

Ainsi, en appelant $3h$ une constante indéterminée, on peut regarder comme déduit de l'expérience que

$$r \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr} + 3 \frac{F(r)}{r} = 3h.$$

Soit

$$\frac{F(r)}{r} - h = y,$$

cette relation devient

$$r \frac{dy}{dr} + 3y = 0,$$

d'où

$$y = \frac{h}{r^3},$$

et, par suite,

$$F(r) = hr + \frac{h}{r^2}.$$

Mais, comme on ne peut supposer que l'action élémentaire cherchée puisse en aucun cas être croissante *indéfiniment* avec la distance, on doit regarder la constante h comme nulle et poser simplement

$$F(r) = \frac{h}{r^2}.$$

Mettant cette valeur dans la relation démontrée plus haut

$$2 \frac{f(r) - F(r)}{r^2} = \frac{d \cdot \frac{F(r)}{r}}{dr},$$

on en déduit

$$f(r) = -\frac{1}{2} \frac{k}{r^2}.$$

Donc, en définitive, l'action élémentaire électrodynamique est égale, en négligeant le facteur constant k , à l'expression connue

$$\frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(-\frac{1}{2} \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \omega \right).$$



ESSAI SUR LA THÉORIE ANALYTIQUE DES SATELLITES

DE JUPITER,

PAR M. SOUILLART,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE,
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE DE CAEN.

CHAPITRE PREMIER.

DÉVELOPPEMENT DES DIVERSES FONCTIONS PERTURBATRICES.

1. Lorsqu'on veut déterminer les mouvements des satellites de Jupiter autour de leur planète, il n'est pas permis de confondre les attractions exercées par cet astre avec celles d'un point de même masse placé en son centre de gravité : car, d'une part, les dimensions de Jupiter sont comparables aux distances qui le séparent de ses satellites, et, d'autre part, l'aplatissement de son globe dépasse $\frac{1}{17}$. Le potentiel de l'attraction de Jupiter sur un satellite ne pourra donc pas être confondu avec la quantité $\frac{fM}{r}$, f désignant l'attraction mutuelle de deux unités de masse à l'unité de distance, M la masse de Jupiter et r la distance du centre de gravité du satellite à celui de la planète; et, par conséquent, le mouvement du satellite ne se ferait pas suivant les lois de Képler, quand même il serait seul en présence de sa planète. Laplace a déduit de sa *Théorie des attractions des sphéroïdes*, qu'on peut représenter ce potentiel par $\frac{fM}{r} + fV$, en posant $V = \frac{K}{r^2} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 d \right)$, et en désignant par d la déclinaison du satellite rapportée à l'équateur de Jupiter, et par K une constante (égale au produit de la masse de Jupiter par le carré du rayon de son équateur et par l'excès de son aplatissement sur la moitié du rapport de la force centrifuge à la pesanteur sur cet équateur).

Pour obtenir le mouvement elliptique du satellite, on néglige tout à la fois la quantité V et les actions exercées par les autres corps que Jupiter; mais pour

obtenir son véritable mouvement, il faut ajouter cette correction V aux autres fonctions perturbatrices partielles. La fonction perturbatrice totale sera donc, pour chaque satellite, la somme de cinq parties se rapportant respectivement aux actions des trois autres satellites, à l'action du Soleil et à l'aplatissement de Jupiter : car les seuls astres dont l'influence soit sensible sont le Soleil, à cause de sa masse, et les satellites autres que celui dont il s'agit, à cause de leur proximité.

Bailly entreprit le premier de déterminer par l'analyse les principales inégalités du mouvement des satellites, mais son travail est très-défectueux : car il se contenta d'appliquer à chacun d'eux isolément la théorie de la Lune de Clairaut, sans tenir compte de leurs actions mutuelles et de l'aplatissement de Jupiter. A peu près à la même époque, Lagrange aborda le problème dans toute sa difficulté, et son Mémoire, qui est un chef-d'œuvre d'analyse, fut couronné par l'Académie des Sciences en 1766; cependant son travail était encore bien incomplet au point de vue astronomique, comme il l'annonçait lui-même en lui donnant cette épigraphe : *Multum adhuc restat operis*. C'est à Laplace qu'on doit l'explication de toutes les particularités que présentent les mouvements de ces astres. Ses premières recherches à ce sujet ont été publiées dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences pour 1784*; mais c'est dans les *Mémoires pour 1788* et *pour 1789* que se trouve l'exposition complète de la théorie des quatre satellites, telle, à peu près, qu'elle a été reproduite plus tard dans le tome IV de la *Mécanique céleste*.

Depuis cette époque, la méthode dite de la *variation des constantes* a rendu beaucoup plus facile et plus régulier le calcul des perturbations, en même temps qu'elle a permis de simplifier notablement l'exposition de la science. Il peut donc être utile de reprendre, par cette méthode, la recherche des inégalités principales du mouvement des satellites, ainsi que la démonstration des lois établies par Laplace : tel est le but que je me suis proposé dans ce travail, en me bornant toutefois à la partie analytique.

2. Dans ce qui suit, nous désignerons par des lettres sans accent les quantités qui se rapportent au premier satellite, et par les mêmes lettres affectées de 1, 2, 3 accents les quantités analogues relatives au 2^e, au 3^e et 4^e : les mêmes quantités relatives au Soleil seront représentées par les grandes lettres correspondantes. Nous rapporterons les mouvements à un plan fixe passant par le centre de gravité de Jupiter : ce plan fixe sera arbitraire; nous le supposerons seulement assez voisin de l'équateur de la planète, comme serait, par exemple, le plan dans lequel s'est trouvée, à une époque déterminée, l'orbite que Jupiter décrit autour du Soleil.

Désignons par r et r' les rayons vecteurs menés du centre de Jupiter aux centres de gravité du premier et du second satellite, et par s le cosinus de l'angle compris entre ces rayons : les fonctions perturbatrices $R_{(0,1)}$ et $R_{(1,0)}$, correspondantes

aux actions du second satellite sur le premier et du premier sur le second auront pour expressions

$$R_{(0,1)} = (r^2 + r'^2 - 2rr's)^{-\frac{1}{2}} - \frac{rs}{r^3}, \quad R_{(1,0)} = (r^2 + r'^2 - 2rr's)^{-\frac{1}{2}} - \frac{r's}{r'^3}.$$

De simples changements dans les accents donneraient les autres fonctions perturbatrices

$$R_{(0,2)}, R_{(0,3)}, R_{(1,1)}, R_{(1,2)}, R_{(2,0)}, R_{(2,1)}, R_{(2,2)}, R_{(3,0)}, R_{(3,1)}, R_{(3,2)}$$

provenant, comme les deux premières, des actions mutuelles des satellites.

Les fonctions perturbatrices dues aux actions du Soleil sur chacun des satellites, fonctions que nous désignerons par $R_{(0,s)}$, $R_{(1,s)}$, $R_{(2,s)}$, $R_{(3,s)}$ s'obtiendront aussi par des formules pareilles : ainsi on aura

$$R_{(0,s)} = (r^2 + \mathfrak{R}^2 - 2r\mathfrak{R}s)^{-\frac{1}{2}} - \frac{r\mathfrak{S}}{\mathfrak{R}^3}.$$

Enfin, pour la correction d'aplatissement, nous adopterons la formule de Laplace

$$V = \frac{K}{r^3} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 d \right).$$

D'après cela, si l'on désigne par Ω , Ω' , Ω'' , Ω''' les fonctions perturbatrices totales qu'il faut considérer pour les quatre satellites, on aura

$$\begin{aligned} \Omega &= fm' R_{(0,1)} + fm'' R_{(0,2)} + fm''' R_{(0,3)} + f\mathfrak{M} R_{(0,s)} + fV, \\ \Omega' &= fm R_{(1,0)} + fm'' R_{(1,2)} + fm''' R_{(1,3)} + f\mathfrak{M} R_{(1,s)} + fV', \\ \Omega'' &= \dots\dots\dots \\ \Omega''' &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Nous allons développer successivement chacune des parties dont se composent ces fonctions : dans ces développements, nous conserverons les inclinaisons des orbites sur le plan fixe, au lieu d'y introduire leurs inclinaisons mutuelles.

3. Les valeurs qu'il faudra prendre pour les diverses fonctions $R_{(0,1)}$, $R_{(0,2)}$, $R_{(0,3)}$, $R_{(1,0)}$, ..., qui correspondent aux actions mutuelles des satellites, se déduiront de formules générales que nous allons d'abord donner.

On trouve dans le tome I^{er} des *Annales de l'Observatoire* (p. 268 et 272) le tableau des termes dont se composent les fonctions $R_{(0,1)}$ et $R_{(1,0)}$, borné au second ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons ; mais comme il entre dans ces développements l'inclinaison relative des orbites au lieu de leurs inclinaisons sur le plan fixe, nous n'en pourrions déduire que les termes indépendants des inclinaisons. Quant aux termes qui en dépendent, le calcul en est assez court, et on

pourrait, du reste, les obtenir au moyen des formules données par M. Le Verrier dans la *Connaissance des Temps pour 1844*.

Désignons, suivant l'usage, par $a, \varepsilon, e, \varpi, \varphi, \theta$ les éléments elliptiques, et par l la longitude moyenne; posons de plus, suivant les notations employées dans les *Annales de l'Observatoire*,

$$(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \beta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Sigma A^{(i)} \cos i\beta,$$

$$aa' (a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \beta)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \Sigma B^{(i)} \cos i\beta,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières de i , positives, nulle et négatives; et enfin

$$A_p^{(i)} = \frac{1}{1.2.3\dots p} a^p \frac{d^p A^{(i)}}{da^p}.$$

La valeur complète de $R_{(0,1)}$, bornée aux secondes puissances des excentricités et des inclinaisons, sera donnée par les deux formules suivantes :

Première partie.

$$\begin{aligned} & (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \beta)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{1}{2} A^{(i)} + \frac{e^2 + e'^2}{4} (-2i^2 A^{(i)} + A_1^{(i)} + A_2^{(i)}) \right] \cos(il' - il) \\ &+ \frac{ee'}{2} [(2i^2 + i) A^{(i)} - A_1^{(i)} - A_2^{(i)}] \cos[(i+1)l' - (i+1)l - \varpi' + \varpi] \\ &+ \frac{e}{2} (-2i A^{(i)} - A_1^{(i)}) \cos[il' - (i-1)l - \varpi] \\ &+ \frac{e'}{2} [(2i+1) A^{(i)} + A_1^{(i)}] \cos[(i+1)l' - il - \varpi'] \\ &+ \frac{e^2}{8} [(4i^2 - 5i) A^{(i)} + (4i-2) A_1^{(i)} + 2A_2^{(i)}] \cos[il' - (i-2)l - 2\varpi] \\ &+ \frac{ee'}{2} [(-2i^2 - i) A^{(i)} + (-2i-1) A_1^{(i)} - A_2^{(i)}] \cos[(i+1)l' - (i-1)l - \varpi' - \varpi] \\ &+ \frac{e'^2}{8} [(4i^2 + 9i + 4) A^{(i)} + (4i+6) A_1^{(i)} + 2A_2^{(i)}] \cos[(i+2)l' - il - 2\varpi'] \\ &+ \frac{1}{2} B^{(i-1)} \left\{ - \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi'}{2} \right) \cos(il' - il) \right. \\ &\quad + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos[il' - (i-2)l - 2\theta] + \sin^2 \frac{\varphi'}{2} \cos[il' - (i-2)l - 2\theta'] \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sin \varphi \sin \varphi' \{ \cos(il' - il - \theta' + \theta) - \cos[il' - (i-2)l - \theta' - \theta] \} \right\}, \end{aligned}$$

expression dans laquelle i doit recevoir toutes les valeurs entières, positives et négatives, zéro compris.

Deuxième partie.

$$\begin{aligned}
-\frac{rs}{r'^2} = \frac{a}{a'^2} & \left[\left(-1 + \frac{e^2 + e'^2}{2} \right) \cos(l' - l) - ee' \cos(2l' - 2l - \varpi' + \varpi) \right. \\
& + \frac{3}{2} e \cos(l' - \varpi) - \frac{1}{2} e \cos(l' - 2l + \varpi) - 2e' \cos(2l' - l - \varpi') \\
& - \frac{e^2}{8} \cos(l' + l - 2\varpi) - \frac{3}{8} e^2 \cos(l' - 3l + 2\varpi) + 3ee' \cos(2l' - \varpi' - \varpi) \\
& \left. - \frac{e'^2}{8} \cos(l' + l - 2\varpi') - \frac{27}{8} e'^2 \cos(3l' - l - 2\varpi') \right] \\
& - \frac{a}{a'^2} \left[- \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi'}{2} \right) \cos(l' - l) + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos(l' + l - 2\theta) + \sin^2 \frac{\varphi'}{2} \cos(l' + l - 2\theta') \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \sin \varphi \sin \varphi' [\cos(l' - l - \theta' + \theta) - \cos(l' + l - \theta' - \theta)] \right].
\end{aligned}$$

La valeur de $R_{(1,0)}$, au même degré d'approximation, sera de même fournie par les formules suivantes.

Première partie.

$$(r^2 + r'^2 - 2rr's)^{-\frac{1}{2}},$$

la même que dans $R_{(0,1)}$.

Deuxième partie.

$$\begin{aligned}
-\frac{r's}{r'^2} = \frac{a'}{a^2} & \left[\left(-1 + \frac{e^2 + e'^2}{2} \right) \cos(l' - l) - ee' \cos(2l' - 2l - \varpi' + \varpi) \right. \\
& - 2e \cos(l' - 2l + \varpi) + \frac{3}{2} e' \cos(l - \varpi') - \frac{1}{2} e' \cos(2l' - l - \varpi') \\
& - \frac{e^2}{8} \cos(l' + l - 2\varpi) - \frac{27}{8} e^2 \cos(l' - 3l + 2\varpi) + 3ee' \cos(2l - \varpi' - \varpi) \\
& \left. - \frac{e'^2}{8} \cos(l' + l - 2\varpi') - \frac{3}{8} e'^2 \cos(3l' - l - 2\varpi') \right] \\
& - \frac{a'}{a^2} \left[- \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi'}{2} \right) \cos(l' - l) + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos(l' + l - 2\theta) + \sin^2 \frac{\varphi'}{2} \cos(l' + l - 2\theta') \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \sin \varphi \sin \varphi' [\cos(l' - l - \theta' + \theta) - \cos(l' + l - \theta' - \theta)] \right].
\end{aligned}$$

4. Pour les fonctions $R_{(0,2)}$, $R_{(1,2)}$,... qui proviennent de l'action du Soleil, nous emploierons un autre mode de développement, celui dont on fait usage dans la théorie de la Lune. Développons, par la formule de Newton, le second membre de l'expression

$$R_{(0,2)} = (r^2 + R^2 - 2rR\delta)^{-\frac{1}{2}} - \frac{r\delta}{R^2},$$

en négligeant, à l'exemple de Laplace, la quatrième puissance du rapport $\frac{r}{\mathcal{R}}$ (même pour le quatrième satellite, ce rapport n'atteint pas $\frac{1}{400}$). La fonction $R_{(0,s)}$ se réduira aux deux termes $\frac{1}{\mathcal{R}} + \frac{3s^2-1}{2} \frac{r^2}{\mathcal{R}^3}$, dont le premier est inutile à conserver puisqu'il ne contient que les éléments du Soleil. On aura donc simplement

$$R_{(0,s)} = \frac{3s^2-1}{2} \frac{r^2}{\mathcal{R}^3}.$$

Si, dans cette expression, on remplace les quantités s , r , $\mathcal{R}$ par leurs valeurs en fonction des éléments du satellite m et du Soleil, il vient, en se bornant aux secondes puissances des excentricités et des inclinaisons, et mettant φ et Φ au lieu de $\sin \varphi$ et $\sin \Phi$, le développement suivant que nous empruntons à un Mémoire de M. Puiseux sur les principales inégalités du mouvement de la Lune (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. I, p. 49) :

$$\begin{aligned} R_{(0,s)} = \frac{a^2}{\mathcal{A}^3} & \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos(2\mathcal{L} - 2l) + \frac{3}{4} \mathcal{E} \cos(\mathcal{L} - \Pi) + \frac{21}{8} \mathcal{E} \cos(3\mathcal{L} - 2l - \Pi) \right. \\ & - \frac{3}{8} \mathcal{E} \cos(\mathcal{L} - 2l + \Pi) - \frac{1}{2} e \cos(l - \varpi) - \frac{9}{4} e \cos(2\mathcal{L} - l - \varpi) \\ & + \frac{3}{4} e \cos(2\mathcal{L} - 3l + \varpi) + \frac{3}{8} \mathcal{E}^2 + \frac{9}{8} \mathcal{E}^2 \cos(2\mathcal{L} - 2\Pi) \\ & + \frac{51}{8} \mathcal{E}^2 \cos(4\mathcal{L} - 2l - 2\Pi) - \frac{15}{8} \mathcal{E}^2 \cos(2\mathcal{L} - 2l) + \frac{3}{8} e^2 - \frac{1}{8} e^2 \cos(2l - 2\varpi) \\ & + \frac{3}{4} e^2 \cos(2\mathcal{L} - 4l + 2\varpi) - \frac{15}{8} e^2 \cos(2\mathcal{L} - 2l) + \frac{15}{8} e^2 \cos(2\mathcal{L} - 2\varpi) \\ & - \frac{3}{4} e \mathcal{E} \cos(\mathcal{L} + l - \Pi - \varpi) + \frac{9}{8} e \mathcal{E} \cos(\mathcal{L} - l + \Pi - \varpi) \\ & + \frac{21}{8} e \mathcal{E} \cos(3\mathcal{L} - 3l - \Pi + \varpi) - \frac{63}{8} e \mathcal{E} \cos(3\mathcal{L} - l - \Pi - \varpi) \\ & - \frac{3}{8} e \mathcal{E} \cos(\mathcal{L} - 3l + \Pi + \varpi) - \frac{3}{4} e \mathcal{E} \cos(\mathcal{L} - l - \Pi + \varpi) \\ & - \frac{3}{8} \varphi^2 - \frac{3}{8} \varphi^2 \cos(2\mathcal{L} - 2l) + \frac{3}{8} \varphi^2 \cos(2l - 2\theta) + \frac{3}{8} \varphi^2 \cos(2\mathcal{L} - 2\theta) \\ & - \frac{3}{8} \Phi^2 - \frac{3}{8} \Phi^2 \cos(2\mathcal{L} - 2l) + \frac{3}{8} \Phi^2 \cos(2l - 2\Theta) + \frac{3}{8} \Phi^2 \cos(2\mathcal{L} - 2\Theta) \\ & + \frac{3}{4} \varphi \Phi \cos(\Theta - \theta) + \frac{3}{4} \varphi \Phi \cos(2\mathcal{L} - 2l - \Theta + \theta) \\ & \left. - \frac{3}{4} \varphi \Phi \cos(2\mathcal{L} - \Theta - \theta) - \frac{3}{4} \varphi \Phi \cos(2l - \Theta - \theta) \right]. \end{aligned}$$

On obtiendrait $R_{(1,s)}$ en remplaçant dans la formule précédente les éléments du satellite m par ceux du satellite m' , et ainsi de suite.

5. Il nous reste à développer la fonction $V = \frac{K}{r^2} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 d \right)$.

Si l'on désigne par ω l'inclinaison de l'équateur de Jupiter sur le plan fixe et par $360^\circ - \psi$ la longitude de son nœud descendant, par λ la latitude du satellite m , par ν sa longitude vraie et par ν' sa longitude projetée, on a les formules

$$\sin d = \sin \lambda \cos \omega + \sin \omega \cos \lambda \sin(\nu + \psi), \quad \sin \lambda = \sin(\nu - \theta) \sin \varphi,$$

d'où

$$\sin d = \sin(\nu - \theta) \sin \varphi \cos \omega + \sin \omega \sin(\nu + \psi) \sqrt{1 - \sin^2(\nu - \theta) \sin^2 \varphi}.$$

Les angles φ et ω étant très-petits et les longitudes ν et ν' ne différant que par des termes du second ordre au moins par rapport à φ , la valeur de $\sin d$ peut se réduire, en ne négligeant que des termes du troisième ordre au moins en φ et ω , à l'expression simple

$$\sin d = \varphi \sin(\nu - \theta) + \omega \sin(\nu + \psi).$$

Par suite, la valeur de V pourra s'écrire

$$V = \frac{K}{r^2} \left\{ \frac{1}{3} - [\varphi \sin(\nu - \theta) + \omega \sin(\nu + \psi)]^2 \right\}.$$

En y mettant pour r et ν leurs expressions en fonction des éléments du satellite et se bornant au second ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, on obtient le développement

$$\begin{aligned} V = \frac{K}{a^2} & \left\{ \frac{1}{3} + e \cos(l - \varpi) \right. \\ & + \frac{1}{2} [e^2 + 3e^2 \cos(2l - 2\varpi) - \varphi^2 - \omega^2 - 2\varphi\omega \cos(\psi + \theta) + \varphi^2 \cos(2l - 2\theta) \\ & \left. + \omega^2 \cos(2l + 2\psi) + 2\varphi\omega \cos(2l + \psi - \theta)] \right\}. \end{aligned}$$

Pour obtenir les fonctions V' , V'' , V''' , il suffit de remplacer dans V les éléments du satellite m par ceux des satellites m' , m'' , m''' .

6. Les formules générales des nos 3, 4, 5 nous fourniront tous les termes des diverses fonctions perturbatrices qu'il faudra employer pour obtenir les inégalités des éléments : ces termes ne seront d'ailleurs pas les mêmes, selon qu'il s'agira de tel ou tel élément d'un même satellite. Nous prendrons pour règle de ne conserver dans chaque formule que des termes comparables, et nous nous bornerons en conséquence aux termes de l'ordre le moins élevé par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, en y joignant les termes de l'ordre suivant qui auront un petit diviseur ou un grand coefficient, s'il y a lieu. D'après les données de l'observation, les moyens mouvements des trois premiers satellites sont à peu près comme les

nombre $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$: il en résulte que les termes auxquels l'intégration pourra faire acquérir de petits diviseurs seront ceux qui contiendront l'un des angles $2l' - l, 2l'' - l'$ ou de leurs multiples. Il n'y a pas lieu de considérer les termes en $4l'' - l$, parce qu'ils seraient au moins du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons; et quant au quatrième satellite, son moyen mouvement n'a pas de rapport simple avec ceux des trois premiers. D'autre part, les termes provenant de V contiennent le coefficient K sans aucune masse : ils peuvent donc avoir des valeurs relativement considérables. Voici, d'après Laplace, les valeurs approchées des éléments dont l'ordre de grandeur importe à considérer :

Excentricités :

$$e \text{ et } e' \text{ sont insensibles, } e'' = 0,001\,342, \quad e''' = 0,007\,277,$$

l'Annuaire du Bureau des Longitudes donne :

$$\zeta = 0,048\,2388.$$

Moyens mouvements diurnes en parties du rayon :

$$n = 3,551\,548, \quad n' = 1,769\,323, \quad n'' = 0,878\,2082, \quad n''' = 0,376\,4876;$$

et d'après *l'Annuaire* :

$$\pi = 0,001\,450\,22,$$

d'où

$$n - 2n' = 0,012\,902, \quad n' - 2n'' = 0,012\,906.$$

Inclinaisons en parties du rayon (le plan fixe étant l'orbite de Jupiter en 1750) :

$$\varphi = 0,053\,92, \quad \varphi' = 0,053\,63, \quad \varphi'' = 0,052\,49, \quad \varphi''' = 0,046\,82, \quad \omega = 0,053\,94.$$

Masses (celle de Jupiter étant prise pour unité) :

$$m = 0,000\,017, \quad m' = 0,000\,23, \quad m'' = 0,000\,088, \quad m''' = 0,000\,042, \quad \pi = 1050.$$

Valeur de la constante K (en prenant pour unité de distance le rayon de l'équateur de Jupiter) :

$$K = 0,021\,9013.$$



CHAPITRE II.

INÉGALITÉS PÉRIODIQUES DU PREMIER ORDRE PAR RAPPORT AUX MASSES.

7. Nous allons déterminer, en premier lieu, les inégalités périodiques des éléments elliptiques et de la longitude moyenne pour chacun des satellites, en nous bornant aux premières puissances des masses, et nous en déduirons les perturbations des coordonnées jovicentriques. Quand il s'agit des planètes, les éléments elliptiques variant peu, on intègre les équations qui expriment leurs variations en regardant ces éléments comme constants dans les seconds membres. Mais, dans le cas des satellites, cette première approximation serait insuffisante, car l'observation constate un déplacement assez rapide des nœuds et des périjoves (plus de 12 degrés par an pour le nœud du second satellite). Il conviendra donc ici, suivant la marche indiquée par Poisson pour le cas analogue de la théorie de la Lune, de remplacer, dans les seconds membres, ceux des éléments qui changent au bout d'un temps assez court par leurs parties constantes augmentées de leurs inégalités séculaires : nous poserons, en conséquence, $\varpi = \varpi_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \beta t$, $\varpi' = \varpi'_0 + \alpha' t, \dots$. Les quantités $\alpha, \beta, \alpha', \dots$, sont, comme on le sait, les parties non périodiques des valeurs de $\frac{d\varpi}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varpi'}{dt}, \dots$: on en trouvera plus loin les expressions complètes (nos 27 et 33). Pour le moment, il nous suffira d'observer que les termes de ces expressions qui dépendent des dimensions de Jupiter sont de beaucoup les plus considérables, en sorte qu'on a à très-peu près

$$\alpha = \frac{Kn}{a^3\mu}, \quad \beta = -\frac{Kn}{a^3\mu}, \quad \alpha' = \frac{Kn'}{a'^3\mu'}, \dots$$

parmi les termes qu'on néglige, les seuls qui aient encore une valeur sensible sont ceux qui proviennent de l'action du Soleil.

Cette modification de la méthode générale n'aura d'autre effet que de changer un peu les dénominateurs introduits par l'intégration dans celles des inégalités dont l'argument contient l'une des quantités $\varpi, \theta, \varpi', \dots$; par exemple, en intégrant le terme $M \sin(2l' - l - \varpi)$, on obtiendra

$$-\frac{M}{2n' - n - \alpha} \cos(2l' - l - \varpi) \quad \text{au lieu de} \quad -\frac{M}{2n' - n} \cos(2l' - l - \varpi).$$

Si l'on observe que la quantité α est précisément égale à la différence qui existe entre n et la quantité que Laplace désigne par N , on verra que cette manière d'opérer revient à celle de Laplace, en ce qui concerne les inégalités du rayon

vecteur et de la longitude. Malgré cela, les formules que nous obtiendrons ainsi ne seront pour nous qu'une première approximation, et nous les remplacerons au chapitre VI par des expressions plus exactes mais aussi plus compliquées, dont quelques-unes se trouvent aussi dans Laplace. Nous ferons de même pour les latitudes, mais ce seront les formules du chapitre VI et non celles du chapitre II qui coïncideront avec celles de Laplace.

I. Inégalités des grands axes.

8. Occupons-nous d'abord du premier satellite. La variation du grand axe est donnée par la formule

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{d\Omega}{d\epsilon}.$$

Considérons en premier lieu dans Ω la partie $\int m' R_{(0,1)}$: nous devons y prendre les termes d'ordre zéro et les termes du premier ordre qui contiennent $2l' - l$. Nous prendrons donc

$$\begin{aligned} R_{(0,1)} = & \frac{1}{2} A^{(1)} \cos(il' - il) - \frac{a}{a'^2} \cos(l' - l) \\ & + A e \cos(2l' - l - \varpi) + \left(B - \frac{2a}{a'^2} \right) e' \cos(2l' - l - \varpi'), \end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$A = -\frac{1}{2} (4A^{(2)} + A_1^{(2)}), \quad B = \frac{1}{2} (3A^{(1)} + A_1^{(1)}).$$

Dans les fonctions $R_{(0,2)}$ et $R_{(0,3)}$ nous n'aurons à prendre que les termes d'ordre zéro, ce qui donnera

$$R_{(0,2)} = \frac{1}{2} \dot{A}^{(1)} \cos(il'' - il) - \frac{a}{a''^2} \cos(l'' - l),$$

$$R_{(0,3)} = \frac{1}{2} \ddot{A}^{(1)} \cos(il''' - il) - \frac{a}{a'''^2} \cos(l''' - l),$$

$\dot{A}^{(1)}$ et $\ddot{A}^{(1)}$ désignant ce que devient le coefficient $A^{(1)}$ quand on y remplace a' par a'' ou a''' .

De même la fonction $R_{(0,4)}$ se réduira à

$$R_{(0,4)} = \frac{3a'}{4a^3} \cos(2l' - 2l).$$

Enfin, à cause de la grandeur du coefficient K qui n'est multiplié par aucune

masse, nous prendrons

$$V = \frac{K}{a^3} e \cos(l - \varpi).$$

D'après cela, en posant $\mu = 1 + m$, et éliminant la constante f au moyen de la relation $f\mu = n^2 a^3$, nous trouverons pour exprimer la variation du grand axe la formule

$$\begin{aligned} \delta a = & -\frac{m'a}{\mu} \frac{n}{n' - n} \left[a \mathbf{A}^{(i)} \cos(il' - il) - \frac{2a^2}{a'^2} \cos(l' - l) \right] \\ & -\frac{m''a}{\mu} \frac{n}{n'' - n} \left[a \dot{\mathbf{A}}^{(i)} \cos(il'' - il) - \frac{2a^2}{a''^2} \cos(l'' - l) \right] \\ & -\frac{m'''a}{\mu} \frac{n}{n''' - n} \left[a \ddot{\mathbf{A}}^{(i)} \cos(il''' - il) - \frac{2a^2}{a'''^2} \cos(l''' - l) \right] \\ & -\frac{3}{2} \frac{\pi}{\mu} \frac{a^4}{\mathbf{A}^3 \mathbf{A}^2} \frac{n}{\mathbf{A}^2 \mathbf{A} - n} \cos(2\mathcal{L} - 2l) \\ & -\frac{2m'a}{\mu} \left[\frac{n}{2n' - n - \alpha} a \mathbf{A} e \cos(2l' - l - \varpi) \right. \\ & \quad \left. + \frac{n}{2n' - n - \alpha'} \left(a \mathbf{B} - \frac{2a^2}{a'^2} \right) e' \cos(2l' - l - \varpi') \right] \\ & + \frac{2K}{\mu a} \frac{n}{n - \alpha} e \cos(l - \varpi). \end{aligned}$$

9. Pour le second satellite on devra prendre

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{(1,1)} &= \frac{1}{2} \mathbf{A}^{(i)} \cos(il - il') - \frac{a'}{a^2} \cos(l - l') \\ &\quad + \mathbf{A} e \cos(2l' - l - \varpi) + \left(\mathbf{B} - \frac{a'}{2a^2} \right) e' \cos(2l' - l - \varpi'), \\ \mathbf{R}_{(1,2)} &= \frac{1}{2} \mathbf{A}'^{(i)} \cos(il'' - il') - \frac{a'}{a'^2} \cos(l'' - l') \\ &\quad + \mathbf{A}' e' \cos(2l'' - l' - \varpi') + \left(\mathbf{B}' - \frac{2a'}{a'^2} \right) e'' \cos(2l'' - l' - \varpi''), \\ \mathbf{R}_{(1,3)} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{A}}'^{(i)} \cos(il''' - il') - \frac{a'}{a'''^2} \cos(l''' - l'); \end{aligned}$$

$\mathbf{R}_{(1,2)}$ se déduit de $\mathbf{R}_{(0,1)}$ en ajoutant un accent à chaque lettre; nous désignons par $\mathbf{A}'^{(i)}$ ce que devient $\mathbf{A}^{(i)}$ quand on y change a et a' respectivement en a' et a'' , et par $\mathbf{A}'$ et $\mathbf{B}'$ les expressions $-\frac{1}{2}(4\mathbf{A}'^{(2)} + \mathbf{A}'^{(2)})$, $\frac{1}{2}(3\mathbf{A}'^{(1)} + \mathbf{A}'^{(1)})$. De même $\mathbf{R}_{(1,3)}$ se déduit de $\mathbf{R}_{(0,2)}$ par l'addition d'un accent, et $\dot{\mathbf{A}}'^{(i)}$ désigne ce que devient $\mathbf{A}^{(i)}$ quand on change a et a' respectivement en a' et a''' . Quant aux fonctions $\mathbf{R}_{(1,2)}$ et $\mathbf{V}'$, elles ne diffèrent de $\mathbf{R}_{(0,2)}$ et $\mathbf{V}$ que par la substitution des éléments du second satellite à ceux du premier.

On aura par conséquent

$$\begin{aligned}
 \delta a' = & -\frac{ma'}{\mu'} \frac{n'}{n-n'} \left[a' \dot{A}^{(i)} \cos(il-il') - \frac{2a'^2}{a^2} \cos(l-l') \right] \\
 & -\frac{m''a'}{\mu'} \frac{n'}{n''-n'} \left[a' \dot{A}'^{(i)} \cos(il''-il') - \frac{2a'^2}{a'^2} \cos(l''-l') \right] \\
 & -\frac{m'''a'}{\mu'} \frac{n'}{n'''-n'} \left[a' \dot{A}''^{(i)} \cos(il'''-il') - \frac{2a'^2}{a'^2} \cos(l'''-l') \right] \\
 & -\frac{3}{2} \frac{\pi}{\mu'} \frac{a'^4}{\mathfrak{A}^3 \mathfrak{B}^3} \frac{n'}{n-n'} \cos(2\mathfrak{L}-2l') \\
 & +\frac{4}{\mu'} \frac{ma'}{2n'-n-\alpha} \left[\frac{n'}{2n'-n-\alpha} a' A e \cos(2l'-l-\varpi) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{n'}{2n'-n-\alpha'} \left(a' B - \frac{a'^2}{2a^2} \right) e' \cos(2l'-l-\varpi') \right] \\
 & -\frac{2}{\mu'} \frac{m''a'}{2n''-n'-\alpha'} \left[\frac{n'}{2n''-n'-\alpha'} a' A' e' \cos(2l''-l'-\varpi') \right. \\
 & \quad \left. + \frac{n'}{2n''-n'-\alpha''} \left(a' B' - \frac{2a'^2}{a'^2} \right) e'' \cos(2l''-l'-\varpi'') \right] \\
 & +\frac{2}{\mu' a'} \frac{K}{n'-\alpha'} e' \cos(l'-\varpi').
 \end{aligned}$$

Pour le troisième satellite on devra prendre

$$\begin{aligned}
 R_{(1,0)} &= \frac{1}{2} \dot{A}^{(i)} \cos(il-il'') - \frac{a''}{a^2} \cos(l-l''), \\
 R_{(1,1)} &= \frac{1}{2} \dot{A}'^{(i)} \cos(il'-il'') - \frac{a''}{a'^2} \cos(l'-l'') \\
 &\quad + A' e' \cos(2l''-l'-\varpi') + \left(B' - \frac{a''}{2a'^2} \right) e'' \cos(2l''-l'-\varpi''), \\
 R_{(1,2)} &= \frac{1}{2} \dot{A}''^{(i)} \cos(il'''-il'') - \frac{a''}{a''^2} \cos(l'''-l'').
 \end{aligned}$$

$R_{(2,1)}$ et $R_{(2,2)}$ se déduisent respectivement de $R_{(1,0)}$ et $R_{(1,2)}$ par l'addition d'un accent. On aura par suite

$$\begin{aligned}
 \delta a'' = & -\frac{ma''}{\mu''} \frac{n''}{n-n''} \left[a'' \dot{A}^{(i)} \cos(il-il'') - \frac{2a''^2}{a^2} \cos(l-l'') \right], \\
 & \text{et deux lignes pareilles provenant de } R_{(2,1)} \text{ et } R_{(2,2)}, \\
 & \text{puis deux termes provenant de } R_{(1,1)} \text{ et } V''; \\
 & +\frac{4}{\mu''} \frac{m'a''}{2n''-n'-\alpha'} \left[\frac{n''}{2n''-n'-\alpha'} a'' A' e' \cos(2l''-l'-\varpi') \right. \\
 & \quad \left. + \frac{n''}{2n''-n'-\alpha''} \left(a'' B' - \frac{a''^2}{2a'^2} \right) e'' \cos(2l''-l'-\varpi'') \right].
 \end{aligned}$$

On devra prendre enfin pour le quatrième satellite

$$\begin{aligned} R_{(3,0)} &= \frac{1}{2} \ddot{A}^{(i)} \cos(il - il'') - \frac{\alpha'''}{a^2} \cos(l - l''), \\ R_{(3,1)} &= \frac{1}{2} \dot{A}'^{(i)} \cos(il' - il'') - \frac{\alpha'''}{a'^2} \cos(l' - l''), \\ R_{(3,2)} &= \frac{1}{2} A''^{(i)} \cos(il'' - il''') - \frac{\alpha'''}{a''^2} \cos(l'' - l'''), \end{aligned}$$

ce qui donnera pour la variation de son grand axe la formule

$$\delta \alpha'' = - \frac{m \alpha'''}{\mu''} \frac{n''}{n - n''} \left[\alpha'' \dot{A}^{(i)} \cos(il - il'') - \frac{\alpha''^2}{a^2} \cos(l - l'') \right],$$

et deux lignes pareilles provenant de $R_{(3,1)}$ et $R_{(3,2)}$;
puis deux termes provenant de $R_{(3,1)}$ et V'' .

II. Inégalités des longitudes moyennes.

10. Si l'on pose $\rho = \int n dt$, la longitude moyenne du satellite m a pour expression $l = \rho + \epsilon$, et les variations de chacune des parties ρ et ϵ sont données par les formules

$$\frac{d\rho}{dt} = - \frac{3}{a^2} \frac{d\Omega}{d\epsilon}, \quad \frac{d\epsilon}{dt} = - \frac{2}{na} \frac{d\Omega}{da} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} \frac{d\Omega}{de} + \frac{\tan \frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{d\Omega}{d\varphi}.$$

La seconde formule peut être simplifiée : en effet, les termes de l'ordre le moins élevé dans le second membre seront, pour la première partie, de l'ordre zéro ; pour la deuxième, du premier ordre ; pour la troisième, du second ordre. On peut donc négliger la troisième partie et ne conserver dans la deuxième que les termes contenant K et ceux auxquels l'intégration fera acquérir un petit diviseur. On peut en outre réduire à $\frac{e}{2na^2}$ le coefficient de $\frac{d\Omega}{de}$. Il vient ainsi pour la seconde formule

$$\frac{d\epsilon}{dt} = - \frac{2}{na} \frac{d\Omega}{da} + \frac{e}{2na^2} \frac{d\Omega}{de},$$

et les valeurs à prendre pour les diverses parties de Ω seront les mêmes que dans le § I ; seulement nous prendrons en outre dans $R_{(0,1)}$ le terme $\frac{3}{4} \frac{a^2}{a^3} \mathcal{E} \cos(\mathcal{L} - \Pi)$ qui donnera pour l'élément ϵ une inégalité à longue période dont le coefficient n'est pas négligeable.

Le même raisonnement s'applique sans modification à chacun des trois autres

satellites. On formera ainsi le tableau suivant pour les inégalités des longitudes moyennes :

Premier satellite.

$$\begin{aligned} \delta\rho = & \frac{3}{2} \frac{m'}{\mu} \left(\frac{n}{n' - n} \right)^2 \left[\frac{1}{i} a A^{(i)} \sin(il' - il) - \frac{2a^2}{a'^2} \sin(l' - l) \right] \\ & \text{et deux lignes pareilles contenant } m'' \text{ et } m'''; \\ & + \frac{9}{8} \frac{\mathfrak{M}}{\mu} \frac{a^3}{\mathfrak{A}^3} \left(\frac{n}{\mathfrak{N} - n} \right)^2 \sin(2\mathfrak{L} - 2l) \\ & - \frac{3K}{a^2 \mu} \frac{n}{n - \alpha} e \sin(l - \varpi) \\ & + \frac{3m'}{\mu} \left[\left(\frac{n}{2n' - n - \alpha} \right)^2 a A e \sin(2l' - l - \varpi) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{n}{2n' - n - \alpha'} \right)^2 \left(aB - \frac{2a^2}{a'^2} \right) e' \sin(2l' - l - \varpi') \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon = & - \frac{m'}{\mu} \frac{n}{n' - n} \left[\frac{1}{i} a A^{(i)} \sin(il' - il) - \frac{2a^2}{a'^2} \sin(l' - l) \right] \\ & \text{et deux lignes pareilles contenant } m'' \text{ et } m'''; \\ & - \frac{3}{2} \frac{\mathfrak{M}}{\mu} \frac{a^3}{\mathfrak{A}^3} \frac{n}{\mathfrak{N} - n} \sin(2\mathfrak{L} - 2l) - \frac{3\mathfrak{M}}{\mu} \frac{a^3}{\mathfrak{A}^3} \frac{n}{\mathfrak{N}} \varepsilon \sin(\mathfrak{L} - \Pi) \\ & + \frac{13}{2} \frac{K}{a^2 \mu} \frac{n}{n - \alpha} e \sin(l - \varpi) \\ & + \frac{m'}{\mu} \left[\frac{n}{2n' - n - \alpha} e \left(a \frac{A}{2} - 2a^2 \frac{dA}{da} \right) \sin(2l' - l - \varpi) \right. \\ & \quad \left. - \frac{n}{2n' - n - \alpha'} 2e' \left(a^2 \frac{dB^2}{da} - \frac{2a^2}{a'^2} \right) \sin(2l' - l - \varpi') \right]. \end{aligned}$$

L'inégalité d'argument $\mathfrak{L} - \Pi$ a pour période une année de Jupiter : elle est analogue à l'*équation annuelle* de la longitude moyenne dans la théorie de la Lune. De même les inégalités d'argument $2\mathfrak{L} - 2l$ sont analogues à la *variation*. Il serait facile de retrouver aussi l'analogie de l'*évection* : il suffirait pour cela de prendre dans $R_{(0,s)}$ le terme $-\frac{9}{4} \frac{a^2}{\mathfrak{A}^3} e \cos(2\mathfrak{L} - l - \varpi)$. Mais les termes qui en résulteraient dans $\delta\rho$ et $\delta\varepsilon$ seraient négligeables à côté des précédents, parce que e est beaucoup plus petite que ε , et que le diviseur $2\mathfrak{N} - n - \alpha$ est, en valeur absolue, beaucoup plus grand que $\mathfrak{N}$. Et en effet, après avoir calculé l'expression analytique de cette inégalité, Laplace reconnaît, lors de la réduction en nombres, qu'elle est négligeable.

Second satellite.

$$\delta\rho' = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu'} \left(\frac{n'}{n-n'} \right)^2 \left[\frac{1}{i} a' A^{(i)} \sin(il - il') - \frac{2a'^2}{a^2} \sin(l - l') \right] .$$

et deux lignes pareilles contenant m'' et m'''

puis deux termes en $\mathfrak{M}$ et $\mathbf{K}$ comme dans $\delta\rho$

$$\begin{aligned} & - \frac{6m}{\mu'} \left[\left(\frac{n'}{2n' - n - \alpha} \right)^2 a' A e \sin(2l' - l - \varpi) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{n'}{2n' - n - \alpha'} \right)^2 \left(a' B - \frac{a'^2}{2a^2} \right) e' \sin(2l' - l - \varpi') \right] \\ & + \frac{3m''}{\mu'} \left[\left(\frac{n'}{2n'' - n' - \alpha'} \right)^2 a' A' e' \sin(2l'' - l' - \varpi') \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{n'}{2n'' - n' - \alpha''} \right)^2 \left(a' B' - \frac{2a'^2}{a'^2} \right) e'' \sin(2l'' - l' - \varpi'') \right] . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon' = & - \frac{m}{\mu'} \frac{n'}{n-n'} \left[- \frac{1}{i} (a' A^{(i)} + a' A_1^{(i)}) \sin(il - il') - \frac{2a'^2}{a^2} \sin(l - l') \right] \\ & - \frac{m''}{\mu'} \frac{n'}{n''-n'} \left[\frac{1}{i} a' A_1^{(i)} \sin(il'' - il') - \frac{2a'^2}{a'^2} \sin(l'' - l') \right] \end{aligned}$$

et une ligne, analogue à la précédente, contenant m'''

puis deux lignes en $\mathfrak{M}$ et un terme en $\mathbf{K}$, comme dans $\delta\varepsilon$

$$\begin{aligned} & + \frac{m}{\mu'} \left[- \frac{n'}{2n' - n - \alpha} 2e a'^2 \frac{dA}{da'} \sin(2l' - l - \varpi) \right. \\ & \quad \left. + \frac{n'}{2n' - n - \alpha'} e' \left(\frac{1}{2} a' B - 2a'^2 \frac{dB}{da'} + \frac{3}{4} \frac{a'^2}{a^2} \right) \sin(2l' - l - \varpi') \right] \\ & + \frac{m''}{\mu'} \left[\frac{n'}{2n'' - n' - \alpha'} e' \left(a' \frac{A'}{2} - 2a'^2 \frac{dA'}{da'} \right) \sin(2l'' - l' - \varpi') \right. \\ & \quad \left. - \frac{n'}{2n'' - n' - \alpha''} 2e'' \left(a'^2 \frac{dB'}{da'} - \frac{2a'^2}{a'^2} \right) \sin(2l'' - l' - \varpi'') \right] . \end{aligned}$$

Troisième satellite.

$$\delta\rho'' = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu''} \left(\frac{n''}{n-n''} \right)^2 \left[\frac{1}{i} a'' A^{(i)} \sin(il - il'') - \frac{2a''^2}{a^2} \sin(l - l'') \right]$$

et deux lignes pareilles contenant m' et m''

+ deux termes en $\mathfrak{M}$ et $\mathbf{K}$

$$\begin{aligned} & - \frac{6m'}{\mu''} \left[\left(\frac{n''}{2n'' - n' - \alpha'} \right)^2 a'' A' e' \sin(2l'' - l' - \varpi') \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{n''}{2n'' - n' - \alpha''} \right)^2 e'' \left(a'' B' - \frac{a''^2}{2a'^2} \right) \sin(2l'' - l' - \varpi'') \right] . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial \varepsilon'' = & -\frac{m}{\mu''} \frac{n''}{n-n''} \left[-\frac{1}{i} (a'' \dot{A}^{(i)} + a'' \dot{A}_1^{(i)}) \sin(il - il'') - \frac{2a''^2}{a^2} \sin(l - l'') \right] \\
& + \text{une ligne pareille contenant } m' \\
& -\frac{m''}{\mu''} \frac{n''}{n''-n'} \left[\frac{1}{i} a'' \dot{A}_1^{(i)} \sin(il'' - il'') - \frac{2a''^2}{a'^2} \sin(l'' - l'') \right] \\
& + \text{deux termes en } \mathfrak{M} \text{ et un terme en } K \\
& + \frac{m'}{\mu''} \left[-\frac{n''}{2n''-n'-a''} 2e' a''^2 \frac{dA'}{da''} \sin(2l'' - l' - \varpi') \right. \\
& \quad \left. + \frac{n''}{2n''-n'-a''} e'' \left(\frac{1}{2} a'' B' - 2a''^2 \frac{dB'}{da''} + \frac{3}{4} \frac{a''^3}{a'^2} \right) \sin(2l'' - l' - \varpi') \right].
\end{aligned}$$

Quatrième satellite.

$$\begin{aligned}
\partial \rho'' = & \frac{3}{2} \frac{m}{\mu''} \left(\frac{n''}{n-n''} \right)^2 \left[\frac{1}{i} a'' \ddot{A}^{(i)} \sin(il - il'') - \frac{2a''^2}{a^2} \sin(l - l'') \right] \\
& + \text{deux lignes pareilles contenant } m' \text{ et } m'' \\
& + \text{deux termes en } \mathfrak{M} \text{ et } K. \\
\partial \varepsilon'' = & -\frac{m}{\mu''} \frac{n''}{n-n''} \left[-\frac{1}{i} (a'' \ddot{A}^{(i)} + a'' \ddot{A}_1^{(i)}) \sin(il - il'') - \frac{2a''^2}{a^2} \sin(l - l'') \right] \\
& + \text{deux lignes pareilles contenant } m' \text{ et } m'' \\
& + \text{deux termes en } \mathfrak{M} \text{ et un terme en } K.
\end{aligned}$$

III. Inégalités des excentricités et des longitudes des périjoves.

11. Les formules générales

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt} = & -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{1}{e} \frac{d\Omega}{d\varpi} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})} e \frac{d\Omega}{d\varepsilon}, \\
\frac{d\varpi}{dt} = & \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{1}{e} \frac{d\Omega}{de} + \frac{tg \frac{\varphi}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{d\Omega}{d\varphi},
\end{aligned}$$

peuvent être ici beaucoup simplifiées. Les termes de l'ordre le moins élevé dans l'expression $\frac{1}{e} \frac{d\Omega}{d\varpi}$ sont de l'ordre zéro, et parmi ces termes il en est qui acquerront de petits diviseurs, tandis que dans l'expression $e \frac{d\Omega}{d\varepsilon}$ les termes sont au moins du premier ordre : on peut donc négliger la seconde partie de $\frac{de}{dt}$. Il en est de même pour $\frac{d\varpi}{dt}$: car l'expression $\frac{1}{e} \frac{d\Omega}{de}$ contient des termes d'ordre -1 qui acquerront de petits

diviseurs, tandis que dans $\tan \frac{\varphi}{2} \frac{d\Omega}{d\varphi}$ tous les termes sont au moins du second ordre. Il est permis en outre de réduire à l'unité le radical $\sqrt{1-e^2}$, et il nous restera les deux formules simples

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{1}{e} \frac{d\Omega}{d\varphi}, \quad \frac{d\varpi}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{1}{e} \frac{d\Omega}{d\varphi}.$$

En même temps la fonction Ω pourra se réduire aux termes du premier ordre dont le coefficient est considérable ou dans lesquels l'intégration introduira un petit diviseur : on prendra donc

$$R_{(s,1)} = A e \cos(2l' - l - \varpi), \quad R_{(s,2)} = R_{(s,3)} = R_{(s,4)} = 0, \quad V = \frac{K}{a^3} e \cos(l - \varpi);$$

ce qui donnera, pour le premier satellite, les inégalités

$$\begin{aligned} \delta e &= \frac{m'}{\mu} \frac{n}{2n' - n - \alpha} a A \cos(2l' - l - \varpi) + \frac{K}{a^2 \mu} \frac{n}{n - \alpha} \cos(l - \varpi), \\ e \delta \varpi &= \frac{m'}{\mu} \frac{n}{2n' - n - \alpha} a A \sin(2l' - l - \varpi) + \frac{K}{a^2 \mu} \frac{n}{n - \alpha} \sin(l - \varpi). \end{aligned}$$

12. *Remarque.* — Si l'on pose

$$e \sin \varpi = h, \quad e \cos \varpi = k,$$

on aura

$$\frac{dh}{dt} = e \cos \varpi \frac{d\varpi}{dt} + \sin \varpi \frac{de}{dt}, \quad \frac{dk}{dt} = -e \sin \varpi \frac{d\varpi}{dt} + \cos \varpi \frac{de}{dt};$$

et comme l'on a

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= -\frac{m' a n}{\mu} A \sin(2l' - l - \varpi) - \frac{K n}{a^2 \mu} \sin(l - \varpi), \\ e \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{m' a n}{\mu} A \cos(2l' - l - \varpi) + \frac{K n}{a^2 \mu} \cos(l - \varpi), \end{aligned}$$

il viendra

$$\frac{dh}{dt} = \frac{m' a n}{\mu} A \cos(2l' - l) + \frac{K n}{a^2 \mu} \cos l, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{m' a n}{\mu} A \sin(2l' - l) - \frac{K n}{a^2 \mu} \sin l.$$

On voit que les seconds membres ne contiennent plus aucune trace de la quantité ϖ (cette circonstance tient au coefficient 1 de la lettre ϖ dans les arguments des termes conservés, ceux-ci étant exclusivement du premier degré par rapport aux excentricités); et, par suite, on aura, sans faire aucune hypothèse sur cet élément,

$$\delta h = \frac{m' a}{\mu} \frac{n}{2n' - n} A \sin(2l' - l) + \frac{K}{a^2 \mu} \sin l, \quad \delta k = \frac{m' a}{\mu} \frac{n}{2n' - n} A \cos(2l' - l) + \frac{K}{a^2 \mu} \cos l.$$

Mais on a

$$\partial e = \sin \varpi \partial h + \cos \varpi \partial k, \quad e \partial \varpi = \cos \varpi \partial h - \sin \varpi \partial k,$$

et, par suite, il viendra pour ∂e et $e \partial \varpi$ les valeurs

$$\begin{aligned} \partial e &= \frac{m'}{\mu} \frac{n}{2n' - n} a \Lambda \cos(2l' - l - \varpi) + \frac{K}{a^2 \mu} \cos(l - \varpi), \\ e \partial \varpi &= \frac{m'}{\mu} \frac{n}{2n' - n} a \Lambda \sin(2l' - l - \varpi) + \frac{K}{a^2 \mu} \sin(l - \varpi), \end{aligned}$$

dans lesquelles n'entre pas la correction α . Ces nouvelles formules seront plus exactes que les précédentes, et on voit même qu'elles n'auront à subir aucune modification tant qu'on ne voudra pas tenir compte, dans les seconds membres, des variations des éléments a , n , ε . Cette remarque est importante à cause du rôle que vont jouer, dans ce qui suit, les inégalités de e et de ϖ : elle s'applique d'ailleurs à chacun des satellites.

13. Pour le second satellite, on prendra de même

$$\begin{aligned} R_{(1,0)} &= \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) e' \cos(2l' - l - \varpi'), \quad R_{(1,2)} = A' e' \cos(2l'' - l' - \varpi'), \\ R_{(1,3)} &= 0, \quad R_{(1,4)} = 0, \quad V' = \frac{K}{a'^3} e' \cos(l' - \varpi'), \end{aligned}$$

ce qui donnera les inégalités

$$\begin{aligned} \partial e' &= \frac{m}{\mu'} \frac{n'}{2n' - n} \left(a' B - \frac{a'^2}{2a^2} \right) \cos(2l' - l - \varpi') \\ &\quad + \frac{m''}{\mu'} \frac{n'}{2n'' - n'} a' A' \cos(2l'' - l' - \varpi') + \frac{K}{a'^2 \mu'} \cos(l' - \varpi'), \\ e' \partial \varpi' &= \frac{m}{\mu'} \frac{n'}{2n' - n} \left(a' B - \frac{a'^2}{2a^2} \right) \sin(2l' - l - \varpi') \\ &\quad + \frac{m''}{\mu'} \frac{n'}{2n'' - n'} a' A' \sin(2l'' - l' - \varpi') + \frac{K}{a'^2 \mu'} \sin(l' - \varpi'). \end{aligned}$$

Pour le troisième, on prendra

$$\begin{aligned} R_{(2,0)} &= R_{(2,2)} = R_{(2,4)} = 0, \\ R_{(2,1)} &= \left(B - \frac{a''}{2a'^2} \right) e'' \cos(2l'' - l' - \varpi''), \quad V'' = \frac{K}{a''^3} e'' \cos(l'' - \varpi''), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \partial e'' &= \frac{m'}{\mu''} \frac{n''}{2n'' - n'} \left(a'' B' - \frac{a''^2}{2a'^2} \right) \cos(2l'' - l' - \varpi'') + \frac{K}{a''^2 \mu''} \cos(l'' - \varpi''), \\ e'' \partial \varpi'' &= \frac{m'}{\mu''} \frac{n''}{2n'' - n'} \left(a'' B' - \frac{a''^2}{2a'^2} \right) \sin(2l'' - l' - \varpi'') + \frac{K}{a''^2 \mu''} \sin(l'' - \varpi''). \end{aligned}$$

Enfin, pour le quatrième, la fonction perturbatrice se réduira à V''' , d'où résulteront les inégalités

$$\delta e''' = \frac{K}{a'''^2 \mu'''} \cos(l''' - \varpi'''), \quad e''' \delta \varpi''' = \frac{K}{a'''^2 \mu'''} \sin(l''' - \varpi''').$$

14. Les formules qui précèdent donnent seulement les termes principaux des inégalités de l'excentricité et de la longitude du périjove; après ceux-là, il y en a encore beaucoup d'autres qui, bien que moins importants, auront des valeurs assez considérables, si on les compare aux inégalités des autres éléments, et que, pour cette raison, nous ne devons pas négliger: ils sont, comme les précédents, d'ordre zéro par rapport aux excentricités, mais ne présentent pas de faibles diviseurs.

Si, dans la fonction $R_{(0,1)}$, nous prenons les termes

$$-\frac{e}{2} [2iA^{(i)} + A_1^{(i)}] \cos[il' - (i-1)l - \varpi] + \frac{3}{2} \frac{a}{a'^2} e \cos(l' - \varpi) - \frac{1}{2} \frac{a}{a'^2} e \cos(l' - 2l + \varpi)$$

(dont le premier comprend le terme $Ae \cos(2l' - l - \varpi)$ employé plus haut), il viendra, pour le premier satellite, les inégalités nouvelles

$$\begin{aligned} \delta e = & -\frac{m'}{\mu} \frac{n}{in' - (i-1)n} \frac{1}{2} [2i a A^{(i)} + a A_1^{(i)}] \cos[il' - (i-1)l - \varpi] \\ & + \frac{m'}{\mu} \frac{n}{n'} \frac{3}{2} \frac{a^2}{a'^2} \cos(l' - \varpi) - \frac{m'}{\mu} \frac{n}{n' - 2n} \frac{1}{2} \frac{a^2}{a'^2} \cos(l' - 2l + \varpi), \end{aligned}$$

$$e \delta \varpi = \dots \text{ (il n'y a qu'à changer le cosinus en sinus).}$$

Les fonctions $R_{(0,2)}$ et $R_{(0,3)}$ donneront aussi des termes pareils, qu'on obtiendra en remplaçant les éléments du second satellite par ceux du troisième ou du quatrième.

De même enfin les termes de $R_{(0,4)}$ qui contiennent la première puissance de e donneront les inégalités

$$\begin{aligned} \delta e = & \frac{\pi}{\mu} \frac{a^3}{A^2} \left[-\frac{1}{2} \cos(l - \varpi) - \frac{9}{4} \frac{n}{2n_2 - n} \cos(2\ell - l - \varpi) + \frac{3}{4} \frac{n}{2n_2 - 3n} \cos(2\ell - 3l + \varpi) \right], \\ e \delta \varpi = & \dots \end{aligned}$$

On aura des formules analogues pour chacun des trois autres satellites.

IV. Inégalités des rayons vecteurs et des longitudes.

15. Les formules du mouvement elliptique donnent pour le rayon vecteur l'expression

$$r = a \left[1 - e \cos(l - \varpi) + \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^2 \cos(2l - 2\varpi) + \dots \right],$$

et par suite les inégalités de cette coordonnée se déduiront de celles des éléments par la formule

$$\begin{aligned} \partial r = \partial a - a [\partial e \cos(l - \varpi) + e \partial \varpi \sin(l - \varpi)] + ae \left[\partial l \sin(l - \varpi) - \frac{\partial a}{a} \cos(l - \varpi) \right] \\ + ae \partial e - ae [\partial e \cos(2l - 2\varpi) + e \partial \varpi \sin(2l - 2\varpi)] + \text{etc.} \end{aligned}$$

Or, d'après les valeurs données plus haut, ∂a contient des termes d'ordre zéro avec des termes du premier ordre que leur coefficient rend comparables aux précédents; ∂e et $e \partial \varpi$ contiennent des termes d'ordre zéro, et si l'on se borne à ceux des nos 12 et 13, ils sont beaucoup plus considérables que les termes de ∂a ; $e \partial l$ et $e \partial a$ ne contiennent que des termes du premier ordre au moins, et ceux-ci n'ont pas de petits diviseurs; enfin, $e \partial e$ et $e^2 \partial \varpi$ ne contiennent que des termes du premier ordre au moins, mais pouvant présenter de petits diviseurs ou le coefficient K. La partie principale des inégalités du rayon vecteur s'obtiendra donc par la formule

$$\partial r = -a [\partial e \cos(l - \varpi) + e \partial \varpi \sin(l - \varpi)],$$

dans laquelle on mettra pour ∂e et $e \partial \varpi$ les valeurs des nos 12 et 13.

Les termes les plus importants après ceux-là s'obtiendront en mettant dans la même formule les valeurs du n° 14, et en substituant en outre les inégalités des nos 8, 9, 12 et 13 dans la formule suivante :

$$\partial_1 r = \partial a + ae \partial e - ae [\partial e \cos(2l - 2\varpi) + e \partial \varpi \sin(2l - 2\varpi)].$$

On obtiendra ainsi, pour les inégalités principales des rayons vecteurs, les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} 1^{\text{er}} \text{ satellite} \dots \quad \partial r &= -\frac{m' a}{\mu} \frac{n}{2n' - n} a A \cos(2l' - 2l) - \frac{K}{a\mu}; \\ 2^{\text{e}} \text{ satellite} \dots \quad \left\{ \begin{aligned} \partial r' &= -\frac{m a'}{\mu'} \frac{n'}{2n' - n} \left(a' B - \frac{a'^2}{2a^2} \right) \cos(l' - l) \\ &\quad - \frac{m'' a'}{\mu'} \frac{n'}{2n'' - n'} a' A' \cos(2l'' - 2l') - \frac{K}{a'\mu'}; \end{aligned} \right. \\ 3^{\text{e}} \text{ satellite} \dots \quad \partial r'' &= -\frac{m' a''}{\mu''} \frac{n''}{2n'' - n'} \left(a'' B' - \frac{a''^2}{2a'^2} \right) \cos(l'' - l') - \frac{K}{a''\mu''}; \\ 4^{\text{e}} \text{ satellite} \dots \quad \partial r''' &= -\frac{K}{a'''\mu'''} \end{aligned}$$

Le dernier terme de ces formules montre que l'aplatissement de Jupiter a pour effet de raccourcir tous les rayons vecteurs des satellites d'une longueur constante pour chacun d'eux et inversement proportionnelle à sa distance moyenne.

Au reste, ce n'est pas la fonction V seulement qui amènera dans ∂r une partie

constante : outre celle que contient ∂a , il en proviendra de chacune des autres fonctions perturbatrices $R_{(0,1)}$, $R_{(0,2)}$, $R_{(0,3)}$ et $R_{(0,4)}$, et pour les obtenir il suffira de prendre dans les formules du n° 14 les termes d'argument $l - \varpi$.

16. La longitude jovicentrique ne se distingue pas de la longitude vraie, tant qu'on ne conserve pas les termes qui dépendent des carrés des inclinaisons, et par suite elle sera donnée par la formule (*)

$$v = l + 2e \sin(l - \varpi) + \frac{5}{4} e^2 \sin(2l - 2\varpi) + \dots,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \partial v = \partial l + 2[\partial e \sin(l - \varpi) - e \partial \varpi \cos(l - \varpi)] + 2e \partial l \cos(l - \varpi) \\ + \frac{5}{2} e[\partial e \sin(2l - 2\varpi) - e \partial \varpi \cos(2l - 2\varpi)] + \frac{5}{2} e^2 \partial l \cos(2l - 2\varpi) + \dots \end{aligned}$$

Or, il entre dans ∂l des termes d'ordre zéro avec des termes du premier ordre ayant la même importance; dans ∂e et $e \partial \varpi$, des termes d'ordre zéro, dont les principaux contiennent un petit diviseur ou le coefficient K ; dans $e \partial l$, des termes du premier ordre au moins, et ceux-ci n'ont pas de petit diviseur; dans $e \partial e$ et $e^2 \partial \varpi$, des termes du premier ordre comparables à ceux de ∂l ; enfin, dans $e^2 \partial l$, des termes du second ordre au moins.

En conséquence, les inégalités principales de la longitude s'obtiendront par la formule

$$\partial v = 2[\partial e \sin(l - \varpi) - e \partial \varpi \cos(l - \varpi)],$$

dans laquelle on mettra pour ∂e et $e \partial \varpi$ les valeurs des n°s 12 et 13; les plus importantes après celles-là s'obtiendront en substituant dans la même formule les valeurs du n° 14, et en mettant en outre celles des n°s 10, 12, 13 dans la formule

$$\partial v = \partial l + \frac{5}{2} e[\partial e \sin(2l - 2\varpi) - e \partial \varpi \cos(2l - 2\varpi)].$$

D'après cela, on aura pour les inégalités principales des longitudes les expressions suivantes :

$$1^{\text{er}} \text{ satellite. } \partial v = -\frac{2m'}{\mu} \frac{n}{2n' - n} aA \sin(2l' - 2l);$$

$$2^{\text{o}} \text{ satellite. } \partial v' = -\frac{2m}{\mu'} \frac{n'}{2n' - n} \left(a'B - \frac{a'^2}{2a^2} \right) \sin(l' - l) - \frac{2m''}{\mu'} \frac{n'}{2n'' - n'} a'A' \sin(2l'' - 2l');$$

(*) Le premier terme $-\frac{1}{4} \varphi^2 \sin(2l - 2\theta)$ de la réduction à l'écliptique donnerait dans ∂v les termes $-\frac{1}{2} \varphi [\partial \varphi \sin(2l - 2\theta) - \varphi \partial \theta \cos(2l - 2\theta) + \varphi \partial l \cos(2l - 2\theta)]$ qui seraient au moins du second ordre.

$$3^{\text{e}} \text{ satellite. } \delta v'' = -\frac{2m'}{\mu''} \frac{n''}{2n'' - n'} \left(a'' B' - \frac{a''^2}{2a'^2} \right) \sin(l'' - l');$$

$$4^{\text{e}} \text{ satellite. } \delta v''' = 0.$$

Remarque I. — Les formules que nous venons d'obtenir pour les inégalités principales des rayons vecteurs et des longitudes sont presque identiques à celles que donne Laplace (*Mécanique céleste*, liv. VIII, n° 4); l'identité serait plus complète si nous avions fait usage des valeurs trouvées au n° 11 pour ∂e et $e\partial\varpi$, mais nous aurions ainsi moins d'exactitude. Les expressions qui précèdent n'auront à subir aucune modification ultérieure, et les corrections qu'amèneront des valeurs plus exactes de e et de ϖ porteront exclusivement sur les parties ∂a et ∂l .

Nos formules diffèrent de celles de Laplace surtout dans les dénominateurs, mais cette différence est très-importante; car, si l'on fait usage des nombres de la *Mécanique céleste*, cela revient à augmenter respectivement de $\frac{1}{5}$, de $\frac{1}{20}$ et de $\frac{1}{100}$ de leur valeur les coefficients qu'on y trouve pour ∂r et ∂v , pour $\partial r'$ et $\partial v'$, pour $\partial r''$ et $\partial v''$. (Voir la Note relative aux valeurs numériques, p. 245.)

Remarque II. — L'observation a fait reconnaître qu'il existe toujours entre les longitudes moyennes des trois premiers satellites la relation $l - 3l' + 2l'' = 0$, et que leurs moyens mouvements sont liés aussi par la relation $n - 3n' + 2n'' = 0$. On en déduit

$$2l'' - 2l' = 180^\circ + l' - l \quad \text{et} \quad 2n'' - n' = 2n' - n;$$

il en résulte que les deux principales inégalités périodiques qui affectent le rayon vecteur et la longitude du second satellite peuvent chacune se réunir en un seul terme, savoir :

$$\text{pour le rayon vecteur.} \quad \frac{a'}{\mu'} \frac{n'}{2n' - n} \left[m'' a' A' - m \left(a' B - \frac{a'^2}{2a^2} \right) \right] \cos(l' - l),$$

$$\text{pour la longitude.} \quad \frac{2}{\mu'} \frac{n'}{2n' - n} \left[m'' a' A' - m \left(a' B - \frac{a'^2}{2a^2} \right) \right] \sin(l' - l).$$

Remarque III. — Au moyen des valeurs données plus haut pour ∂v , $\partial v'$, $\partial v''$, et de la remarque précédente, on peut reconnaître que la période de ces trois inégalités est la même dans les éclipses des trois premiers satellites.

Ces valeurs sont de la forme

$$\delta v = (I) \sin(2l' - 2l), \quad \delta v' = (II) \sin(l' - l), \quad \delta v'' = (III) \sin(l'' - l').$$

Au lieu de rapporter les longitudes à une ligne fixe, nous pouvons les rapporter à un axe mobile, car la position de cet axe disparaît dans les trois arguments $2l' - 2l$, $l' - l$, $l'' - l'$. Choisissons pour cet axe le rayon vecteur mené de Jupiter au Soleil, et supposons qu'à l'origine du temps les deux premiers satellites aient

été simultanément en conjonction, d'où $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 0$; à cause de la relation, qui a toujours lieu, $nt - 3n't + 2n''t + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'' = 180^\circ$, on devra avoir $\varepsilon'' = 90^\circ$. Les formules pourront s'écrire

$$\partial v = (I) \sin(2n't - 2nt), \quad \partial v' = (II) \sin(n't - nt), \quad \partial v'' = (III) \sin(\varepsilon'' + n''t - n't).$$

Posons

$$n - 2n' = n' - 2n'' = \omega,$$

d'où

$$2n' - 2n = -(n + \omega), \quad n' - n = -(n' + \omega), \quad n'' - n' = -(n'' + \omega);$$

les formules deviendront

$$\begin{aligned} \partial v = -(I) \sin(nt + \omega t), \quad \partial v' = -(II) \sin(n't + \omega t), \quad \partial v'' = (III) \sin(\varepsilon'' - n''t - \omega t) \\ = (III) \sin(\varepsilon'' + n''t + \omega t). \end{aligned}$$

Quand le premier satellite est en conjonction, nt est nul ou multiple de 360° , donc alors $\partial v = -(I) \sin \omega t$; quand il est en opposition, nt est un multiple impair de 180° , donc $\partial v = +(I) \sin \omega t$. On voit de même, pour le second et le troisième satellite, que les inégalités principales de leurs longitudes, à l'époque de leurs éclipses, sont exprimées par les formules

$$\partial v' = \mp (II) \sin \omega t, \quad \partial v'' = \pm (III) \sin \omega t.$$

Ainsi ces trois inégalités, quand on les considère seulement dans les éclipses, dépendent du même angle ωt et ont la même période $\frac{2\pi}{\omega}$. Pour évaluer cette période, il faut dans $\omega = n - 2n'$ remplacer n et n' par les moyens mouvements synodiques, ou bien, désignant toujours par n, n', π les moyens mouvements sidéraux, prendre $\omega = n - \pi - 2(n' - \pi) = n - 2n' + \pi$. En faisant usage des nombres du n° 6, on trouve cette période égale à 437^{jours},79, comme l'avaient reconnu Bradley et Wargentin.

Remarque IV. — L'équation annuelle de la longitude est renfermée dans le terme ∂l de ∂v : pour obtenir celle du rayon vecteur, il faudra prendre dans $R_{(0,0)}$ les termes d'arguments $\varrho + l - \Pi - \varpi$ et $\varrho - l - \Pi + \varpi$, et substituer dans ∂r les valeurs correspondantes de ∂e et $e \partial \varpi$. Il viendra ainsi, en négligeant π à côté de n ,

$$\partial r = \frac{3}{2} \frac{\pi}{\mu} \frac{a'}{a^3} \mathcal{C} \cos(\varrho - \Pi).$$

A cette même approximation, il n'en résulte aucun terme nouveau pour la longitude.

Remarque V. — Pour nous borner aux inégalités du premier ordre par rapport aux masses, nous avons négligé dans les valeurs de ∂r et ∂v les termes de la seconde

dimension par rapport aux perturbations des éléments : cependant, à cause de la grandeur numérique des coefficients dans ∂e et $e\partial\varpi$, il y aura lieu de faire une exception pour les termes contenant les carrés et le produit de ces deux quantités. Il sera commode, pour le calcul de ces termes, de remplacer les variables e et ϖ par les variables h et k : les valeurs de r et v deviendront alors

$$r = a \left\{ 1 - h \sin l - k \cos l + \frac{1}{2}(h^2 + k^2) - \frac{1}{2}[(k^2 - h^2) \cos 2l + 2hk \sin 2l] + \dots \right\},$$

$$v = l + 2(k \sin l - h \cos l) + \frac{5}{4}[k^2 - h^2] \sin 2l - 2hk \cos 2l + \dots$$

Les termes que nous voulons conserver actuellement seront donnés par les formules

$$\Delta r = \frac{a}{2}(\partial h^2 + \partial k^2) - \frac{a}{2}[(\partial k^2 - \partial h^2) \cos 2l + 2\partial h \partial k \sin 2l],$$

$$\Delta v = \frac{5}{4}[(\partial k^2 - \partial h^2) \sin 2l - 2\partial h \partial k \cos 2l].$$

Pour le *premier satellite*, les perturbations principales des éléments h et k sont

$$\delta h = -\frac{1}{2}(I) \sin(2l' - l) + \frac{K}{a^2 \mu} \sin l, \quad \delta k = -\frac{1}{2}(I) \cos(2l' - l) + \frac{K}{a^2 \mu} \cos l,$$

ce qui donnera

$$\Delta r = \frac{a}{8}(I)^2 - \frac{a}{8}(I)^2 \cos(4l' - 4l),$$

$$\Delta v = -\frac{5}{16}(I)^2 \sin(4l' - 4l) + \frac{5}{4}(I) \frac{K}{a^2 \mu} \sin(2l' - 2l).$$

Les mêmes formules appliquées à chacun des autres satellites donneront, en faisant usage des valeurs du n° 13 :

$$\begin{aligned} 2^{\text{e}} \text{ satellite} \dots & \left\{ \begin{aligned} \Delta r' &= \frac{a'}{8}(II)^2 - \frac{a'}{8}(II)^2 \cos(2l' - 2l), \\ \Delta v' &= -\frac{5}{16}(II)^2 \sin(2l' - 2l) + \frac{5}{4}(II) \frac{K}{a'^2 \mu'} \sin(l' - l). \end{aligned} \right. \\ 3^{\text{e}} \text{ satellite} \dots & \left\{ \begin{aligned} \Delta r'' &= \frac{a''}{8}(III)^2 - \frac{a''}{8}(III)^2 \cos(2l'' - 2l'), \\ \Delta v'' &= -\frac{5}{16}(III)^2 \sin(2l'' - 2l') + \frac{5}{4}(III) \frac{K}{a''^2 \mu''} \sin(l'' - l'). \end{aligned} \right. \\ 4^{\text{e}} \text{ satellite} \dots & \Delta r''' = 0, \quad \Delta v''' = 0. \end{aligned}$$

Les termes qui précèdent dépendant du carré de la force perturbatrice, il importe d'observer qu'on n'en obtiendrait pas de semblables si l'on calculait les perturbations du second ordre des coordonnées, au moyen des perturbations du

même ordre des éléments. On obtiendrait des termes tout à fait pareils si, pour passer au second ordre par rapport aux masses, on devait introduire dans les valeurs de $\frac{dh}{dt}$, $\frac{dk}{dt}$ les inégalités ∂h , ∂k : mais cela n'aura pas lieu ici, h et k n'entrant pas dans les seconds membres.

On trouve une partie des inégalités ci-dessus dans la *Mécanique céleste* (liv. VIII, n° 18).

V. Inégalités des inclinaisons et des longitudes des nœuds.

17. Les formules générales sont

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{\sin\varphi} \frac{d\Omega}{d\theta} - \frac{\tan\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon} + \frac{d\Omega}{d\omega} \right), \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{\sin\varphi} \frac{d\Omega}{d\varphi};$$

mais elles peuvent être simplifiées. En effet, l'expression $\frac{1}{\sin\varphi} \frac{d\Omega}{d\theta}$ donnera des termes du premier ordre au moins, et parmi ceux-ci il en est qui acquerront de petits diviseurs ou dont le coefficient est déjà considérable, et qu'on peut prendre par conséquent à l'exclusion des autres; l'expression $\tan\frac{\varphi}{2} \frac{d\Omega}{d\varepsilon}$ donnera aussi des termes du premier ordre au moins, mais sans petit diviseur; enfin l'expression $\tan\frac{\varphi}{2} \frac{d\Omega}{d\omega}$ ne contient que des termes du second ordre au moins. On peut donc réduire $\frac{d\varphi}{dt}$ à sa première partie, et il viendra, en remplaçant $\sqrt{1-e^2}$ par 1 et $\sin\varphi$ par φ , les deux formules simples

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{1}{\varphi} \frac{d\Omega}{d\theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{1}{\varphi} \frac{d\Omega}{d\varphi}.$$

Par les mêmes motifs, la fonction Ω se réduira aux termes du second ordre par rapport aux inclinaisons, ayant un grand coefficient ou susceptibles d'acquérir un petit diviseur.

On prendra donc

$$R_{(s,1)} = \frac{1}{8} B^{(s)} [\varphi^2 \cos(4l' - 2l - 2\theta) - 2\varphi\varphi' \cos(4l' - 2l - \theta' - \theta)],$$

$$R_{(s,2)} = 0, \quad R_{(s,3)} = 0, \quad R_{(s,4)} = \frac{3}{8} \frac{a^2}{\mathcal{A}^3} [\varphi^2 \cos(2\ell - 2\theta) - 2\varphi\Phi \cos(2\ell - \Theta - \theta)],$$

$$V = \frac{1}{2} \frac{K}{a^2} [\varphi^2 \cos(2l - 2\theta) + 2\varphi\omega \cos(2l + \psi - \theta)].$$

Il viendra ainsi pour les inégalités périodiques de l'inclinaison et du nœud, relativement au premier satellite,

$$\begin{aligned} \partial\varphi = & \frac{m'}{\mu} \frac{1}{8} \alpha B^{(3)} \left[\frac{n}{2n' - n - \beta} \varphi \cos(4l' - 2l - 2\theta) \right. \\ & \left. - \frac{2n}{4n' - 2n - \beta - \beta'} \varphi' \cos(4l' - 2l - \theta' - \theta) \right] \\ & + \frac{3\pi}{8} \frac{\alpha^3}{\mu} \frac{1}{\mathfrak{L}^3} \left[\frac{n}{2\mathfrak{L} - \beta} \varphi \cos(2\mathfrak{L} - 2\theta) - \frac{2n}{2\mathfrak{L} - \beta} \Phi \cos(2\mathfrak{L} - \Theta - \theta) \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{K}{\alpha^2 \mu} \left[\frac{n}{n - \beta} \varphi \cos(2l - 2\theta) + \frac{2n}{2n - \beta} \omega \cos(2l + \psi - \theta) \right]; \end{aligned}$$

$\varphi \partial\theta = \dots$ (il n'y a qu'à changer les cosinus en sinus dans la valeur de $\partial\varphi$).

Pour le second satellite, on aura de même à prendre :

$$R_{(1,0)} = \frac{1}{8} B^{(3)} [\varphi'^2 \cos(4l' - 2l - 2\theta') - 2\varphi\varphi' \cos(4l' - 2l - \theta' - \theta)],$$

$$R_{(1,1)} = \frac{1}{8} B^{(3)} [\varphi'^2 \cos(4l'' - 2l' - 2\theta') - 2\varphi'\varphi'' \cos(4l'' - 2l' - \theta'' - \theta')],$$

$$R_{(1,2)} = 0;$$

quant aux fonctions $R_{(1,1)}$ et V' , elles ne diffèrent de $R_{(0,1)}$ et V que par la substitution des éléments du second satellite à ceux du premier.

On obtiendra ainsi :

$$\begin{aligned} \partial\varphi' = & \frac{m'}{\mu'} \frac{1}{8} \alpha' B^{(3)} \left[\frac{n'}{2n'' - n' - \beta'} \varphi' \cos(4l' - 2l - 2\theta') \right. \\ & \left. - \frac{2n'}{4n'' - 2n' - \beta' - \beta} \varphi \cos(4l' - 2l - \theta' - \theta) \right] \\ & + \frac{m''}{\mu'} \frac{1}{8} \alpha' B^{(3)} \left[\frac{n'}{2n'' - n' - \beta'} \varphi' \cos(4l'' - 2l' - 2\theta') \right. \\ & \left. - \frac{2n'}{4n'' - 2n' - \beta'' - \beta} \varphi'' \cos(4l'' - 2l' - \theta'' - \theta') \right] \\ & + \text{deux lignes en } \mathfrak{M} \text{ et } K \text{ comme dans } \partial\varphi. \end{aligned}$$

$\varphi' \partial\theta'$ se déduit de $\partial\varphi'$ en changeant les cosinus en sinus.

Pour le troisième satellite, on devra prendre

$$R_{(2,0)} = 0, \quad R_{(2,1)} = 0,$$

$$R_{(2,1)} = \frac{1}{8} B^{(3)} [\varphi''^2 \cos(4l'' - 2l' - 2\theta'') - 2\varphi'\varphi'' \cos(4l'' - 2l' - \theta'' - \theta')],$$

et pour $R_{(2,s)}$ et V'' des valeurs analogues à $R_{(0,s)}$ et V ; cela donnera les inégalités

$$\begin{aligned} \delta\varphi'' = \frac{m'}{\mu} \frac{1}{8} a'' B^{(1)} \left[\frac{n''}{2n'' - n' - \beta''} \varphi'' \cos(4l'' - 2l' - 2\theta'') \right. \\ \left. - \frac{2n''}{4n'' - 2n' - \beta'' - \beta'} \varphi' \cos(4l'' - 2l' - \theta'' - \theta') \right] \\ + \text{deux lignes en } \mathfrak{N} \text{ et } K. \end{aligned}$$

$\varphi'' \delta\theta''$ se déduit de $\delta\varphi''$ en remplaçant les cosinus par des sinus.

Enfin, pour le quatrième satellite, les inégalités $\delta\varphi'''$ et $\varphi'' \delta\theta'''$ se réduisent aux termes en $\mathfrak{N}$ et en K , du moins quand on se borne aux principales.

Dans les formules qui précèdent, les nombres $\beta, \beta', \dots$, sont ceux qui ont été définis au n° 6 : le nombre analogue qui se rapporterait au Soleil, c'est-à-dire la variation séculaire du nœud de l'orbite de Jupiter, est négligeable à côté de $\beta, \beta', \dots$, et en conséquence nous ne l'avons pas fait figurer, non plus que la variation séculaire du nœud de son équateur.

VI. Inégalités des latitudes.

18. La latitude est donnée, dans le mouvement elliptique, par la formule $\sin\lambda = \sin\varphi \sin(\nu - \theta)$, qui se réduit, en négligeant le carré de l'inclinaison, à $\lambda = \varphi \sin(\nu - \theta)$. On en déduit

$$\delta\lambda = \delta\varphi \sin(\nu - \theta) - \varphi \delta\theta \cos(\nu - \theta) + \varphi \delta\nu \cos(\nu - \theta).$$

Il est permis de confondre $\sin(\nu - \theta)$ et $\cos(\nu - \theta)$ avec $\sin(l - \theta)$ et $\cos(l - \theta)$, qui n'en diffèrent que par des termes de l'ordre des excentricités : on ne néglige ainsi dans $\delta\lambda$ que des termes de la seconde dimension par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Il viendra alors

$$\delta\lambda = \delta\varphi \sin(l - \theta) - \varphi \delta\theta \cos(l - \theta) + \varphi \delta\nu \cos(l - \theta),$$

et on peut reconnaître que les trois parties dont se compose cette valeur renferment des termes du même ordre de grandeur. En se bornant aux valeurs principales de $\delta\varphi$, $\delta\theta$ et $\delta\nu$, on trouve pour le premier satellite :

$$\begin{aligned} \delta\lambda = -\frac{m'}{\mu} \frac{1}{8} a B^{(1)} \left[\frac{n}{2n' - n - \beta} \varphi \sin(4l' - 3l - \theta) \right. \\ \left. - \frac{2n}{4n' - 2n - \beta' - \beta} \varphi' \sin(4l' - 3l - \theta') \right] \\ - \frac{3}{8} \frac{\pi}{\mu} \frac{a^3}{\mathfrak{A}^3} \left[\frac{n}{\mathfrak{N} - \beta} \varphi \sin(2l' - l - \theta) - \frac{2n}{2\mathfrak{N} - \beta} \sin(2l' - l - \theta) \right] \end{aligned}$$

24.

$$-\frac{1}{2} \frac{K}{a^2 \mu} \left[\frac{n}{n-\beta} \varphi \sin(l-\theta) + \frac{2n}{2n-\beta} \omega \cos(l+\psi) \right] \\ - \frac{m'}{\mu} \frac{n}{2n'-n} a \Lambda \varphi [\sin(2l'-l-\theta) + \sin(2l'-3l+\theta)].$$

On aura de même pour le second :

$$\partial \lambda' = -\frac{m}{\mu'} \frac{1}{8} a' B^{(3)} \left[\frac{n'}{2n'-n-\beta'} \varphi' \sin(3l'-2l-\theta') \right. \\ \left. - \frac{2n'}{4n'-2n-\beta'-\beta} \varphi \sin(3l'-2l-\theta) \right] \\ - \frac{m''}{\mu'} \frac{1}{8} a' B'^{(3)} \left[\frac{n'}{2n''-n'-\beta'} \varphi' \sin(4l''-3l'-\theta') \right. \\ \left. - \frac{2n'}{4n''-2n'-\beta''-\beta'} \varphi'' \sin(4l''-3l'-\theta'') \right] \\ + \text{deux lignes en } \mathfrak{M} \text{ et } K \\ + \frac{1}{\mu'} \frac{n'}{2n'-n} \left[m'' a' A' - m \left(a' B - \frac{a'^2}{2a^2} \right) \right] \varphi' [\sin(2l'-l-\theta') - \sin(l-\theta')].$$

On remarquera ici, comme pour les longitudes et les rayons vecteurs, que les inégalités contenues dans les deux premières parties de $\partial \lambda'$ ne dépendent en réalité que du même argument : on a en effet $4l'' - 3l' = 3l' - 2l + 360^\circ$.

Pour le troisième satellite on aura :

$$\partial \lambda'' = -\frac{m'}{\mu''} \frac{1}{8} a'' B'^{(3)} \left[\frac{n''}{2n''-n'-\beta''} \varphi'' \sin(3l''-2l'-\theta'') \right. \\ \left. - \frac{2n''}{4n''-2n'-\beta''-\beta'} \varphi' \sin(3l''-2l'-\theta') \right] \\ + \text{deux lignes en } \mathfrak{M} \text{ et } K \\ - \frac{m'}{\mu''} \frac{n''}{2n''-n'} \left(a'' B' - \frac{a''^2}{2a'^2} \right) \varphi'' [\sin(2l''-l'-\theta'') - \sin(l'-\theta')].$$

Enfin, pour le quatrième satellite, $\partial \lambda'''$ se réduit aux termes en $\mathfrak{M}$ et K .

Les formules qui précèdent constituent pour le calcul des latitudes une première approximation, analogue à celle qu'on a obtenue pour les rayons vecteurs et les longitudes, mais elles sont moins exactes que celles des nos 15 et 16; en effet, tous leurs termes (excepté ceux de la dernière ligne dans chaque formule) devront être rectifiés quand on aura obtenu des valeurs plus approchées de φ et θ , et c'est ce que nous ferons au chapitre VI. Sous leur forme actuelle, ces inégalités ont l'avantage de ne présenter qu'un petit nombre de termes.

Laplace n'obtient pas cette première approximation, et il donne immédiatement (liv. VIII, n° 11) les formules analogues à celles que nous trouverons plus loin.

CHAPITRE III.

RELATIONS ENTRE LES LONGITUDES MOYENNES ET LES MOYENS MOUVEMENTS
DES TROIS PREMIERS SATELLITES. — LIBRATION.

19. L'observation établit avec une précision très-remarquable les deux théorèmes suivants : 1° le moyen mouvement du premier satellite, plus deux fois celui du troisième, est égal à trois fois celui du second ; 2° la longitude moyenne du premier, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est égale à 180 degrés.

Laplace a trouvé dans les actions mutuelles des satellites la raison de ces deux théorèmes : il en a donné une première démonstration dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences pour 1784*, puis une autre un peu différente dans les *Mémoires pour 1788*. Ces deux démonstrations ont été reproduites dans la *Mécanique céleste* (liv. II et liv. VIII) : celle que nous allons développer s'appuie également sur les mêmes considérations.

Dans le mouvement elliptique le moyen mouvement est la quantité n , mais dans le mouvement troublé il est représenté par la quantité $n + \frac{d\varepsilon}{dt}$ réduite à sa partie constante : désignons-le par n_0 . Les deux théorèmes à démontrer sont exprimés par les formules

$$n_0 - 3n'_0 + 2n''_0 = 0, \quad n_0 t - 3n'_0 t + 2n''_0 t + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'' = 180^\circ.$$

La différence étant assez faible entre n et n_0 , la quantité $n - 3n' + 2n''$ sera extrêmement petite, et on conçoit que les inégalités les plus importantes des longitudes moyennes seront celles où entrera le diviseur $(n - 3n' + 2n'')^2$, bien qu'elles soient du second ordre par rapport aux masses. Pour déterminer ces inégalités, on peut, dans la longitude moyenne $l = \rho + \varepsilon$, négliger la partie ε qui n'amènerait en diviseur que la première puissance de $n - 3n' + 2n''$: en conséquence on prendra pour le premier satellite la formule $\frac{d^2 l}{dt^2} = -\frac{3}{a^2} \frac{d\Omega}{d\varepsilon}$, et on ne considérera dans le second membre que les termes dépendants de l'angle $L = l - 3l' + 2l''$ ou de ses multiples. La fonction Ω ne contient aucun terme pareil, mais il en apparaîtra si l'on y remplace les quantités $a, l, e, \dots, a', l', \dots$, par $a + \partial a, l + \partial l, e + \partial e, \dots, a' + \partial a', l' + \partial l', \dots, \partial a, \partial l$, etc., étant les inégalités trouvées au chapitre II ; et pour les obtenir il suffira de combiner convenablement les termes de Ω avec ceux des inégalités $\partial a, \partial l$, etc.

20. On obtiendra dans Ω , et par suite dans $\frac{d\Omega}{d\varepsilon}$, des termes en L , en prenant les termes de Ω qui sont d'ordre zéro par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, et dont les arguments sont de la forme $il' - il$ ou $il'' - il$, et y associant des termes d'argument $kl'' - kl'$ ou $kl'' - kl$ ou $kl' - kl$ choisis convenablement dans les valeurs de ∂a , ∂l , ..., etc.

Considérons d'abord les termes d'ordre zéro dans $R_{(0,1)}$ et prenons

$$R_{(0,1)} = \frac{1}{2} A^{(i)} \cos(il' - il)$$

(en convenant de renfermer $-\frac{2a}{a'^2}$ dans le coefficient $A^{(i)}$).

On aura pour cette partie

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = -\frac{3ifm'}{2} \frac{1}{a^2} A^{(i)} \sin(il' - il).$$

Premier cas. — L'argument que l'on combine avec $il' - il$ est de la forme $kl'' - kl'$. On doit avoir $k = \pm 2i$, mais il suffira de prendre $k = +2i$ et de doubler le résultat. Les inégalités du premier satellite ne contiennent aucun angle de la forme $kl'' - kl'$: nous n'avons donc à considérer que les accroissements $\partial a'$ et $\partial l'$. Désignons par $\Delta \frac{d^2 l}{dt^2}$ l'accroissement de l'expression quand on y change a' et l' en $a' + \partial a'$ et $l' + \partial l'$, il viendra, en différentiant par ∂ ,

$$\Delta \frac{d^2 l}{dt^2} = -\frac{3ifm'}{2a^2} \left[\frac{dA^{(i)}}{da'} \partial a' \sin(il' - il) + i \partial l' A^{(i)} \cos(il' - il) \right]$$

ou bien, pour n'avoir que des dérivées relatives à a ,

$$\Delta \frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{3ifm'}{2a^2} \left[(A^{(i)} + A_1^{(i)}) \frac{\partial a'}{a'} \sin(il' - il) - i \partial l' A^{(i)} \cos(il' - il) \right].$$

Les valeurs à prendre pour $\partial a'$ et $\partial l'$ sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial a'}{a'} &= -\frac{m'' a'}{\mu'} \frac{n'}{n'' - n'} A'^{(2i)} \cos(2il'' - 2il'), \\ i \partial l' &= \frac{m'' a'}{\mu'} \frac{n'}{n'' - n'} \left(\frac{3}{4} \frac{n'}{n'' - n'} A'^{(2i)} - \frac{1}{2} A_1'^{(2i)} \right) \sin(2il'' - 2il'); \end{aligned}$$

en les substituant et ne conservant que l'angle iL , il vient, après avoir doublé le second membre pour tenir compte de la valeur $k = -2i$,

$$\Delta \frac{d^2 l}{dt^2} = +\frac{3ifm'}{2a^2} \frac{m'' a'}{\mu'} \frac{n'}{n'' - n'} \left[(A^{(i)} + A_1^{(i)}) A'^{(2i)} - \left(\frac{3}{4} \frac{n'}{n'' - n'} A'^{(2i)} - \frac{1}{2} A_1'^{(2i)} \right) A^{(i)} \right] \sin iL,$$

cients soit la même en valeur absolue. Mais les termes qu'on obtiendra ainsi n'auront pas tous la même importance, et pour se borner aux plus considérables, on prendra, parmi les diverses parties de $\partial a, \partial l, \dots, \partial a', \dots$, etc., dont les arguments seraient convenables, celles-là seulement qui présentent de petits diviseurs (*). Or les termes d'argument $k(l'' - l) \pm l''$ ne peuvent avoir de petit diviseur, et parmi les termes d'argument $k(l'' - l') \pm l''$, les seuls qui en présentent sont ceux en $2l'' - l'$. Ces derniers ne se trouvent pas dans les inégalités du premier satellite : il suffit donc de faire varier les éléments du second, ce qui donne

$$\begin{aligned}\partial a' &= -\frac{2m''a'^2}{\mu'} \left[\frac{n'}{2n'' - n' - a'} A' e' \cos(2l'' - l' - \varpi') \right. \\ &\quad \left. + \frac{n'}{2n'' - n' - a''} \left(B' - \frac{2a'}{a'^2} \right) e'' \cos(2l'' - l' - \varpi'') \right], \\ \partial l' &= \partial \rho' = \frac{3m''a'}{\mu'} \left[\left(\frac{n'}{2n'' - n' - a'} \right)^2 A' e' \sin(2l'' - l' - \varpi') \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{n'}{2n'' - n' - a''} \right)^2 \left(B' - \frac{2a'}{a'^2} \right) e'' \sin(2l'' - l' - \varpi'') \right], \\ \partial e' &= \frac{m''a'}{\mu'} \frac{n'}{2n'' - n'} A' \cos(2l'' - l' - \varpi'), \\ e' \partial \varpi' &= \frac{m''a'}{\mu'} \frac{n'}{2n'' - n'} A' \sin(2l'' - l' - \varpi').\end{aligned}$$

L'angle $2l' - l$ étant le seul qui, par sa combinaison avec $2l'' - l'$, puisse donner L, nous prendrons simplement

$$R_{(e,l)} = A e \cos(2l' - l - \varpi) + \left(B - \frac{2a}{a'^2} \right) e' \cos(2l' - l - \varpi'),$$

et par suite

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = -\frac{3m'}{\mu} an^2 \left[A e \sin(2l' - l - \varpi) + \left(B - \frac{2a}{a'^2} \right) e' \sin(2l' - l - \varpi') \right].$$

On peut encore simplifier, en observant qu'on peut se borner à faire varier dans cette formule les éléments e' et ϖ' . En effet, si nous faisons varier seulement e' et ϖ' , il viendra

$$\Delta \frac{d^2 l}{dt^2} = -\frac{3m'}{\mu} an^2 \left(B - \frac{2a}{a'^2} \right) [\partial e' \sin(2l' - l - \varpi') - e' \partial \varpi' \cos(2l' - l - \varpi')],$$

expression qui est de l'ordre zéro par rapport aux excentricités.

(*) Il n'y a pas lieu à prendre dans $\partial a, \partial l, \dots, \partial a', \dots$ les termes contenant le coefficient K, parce qu'ils ne contiennent pas la longitude l'' .

Si l'on fait varier aussi les quantités α' et l' , il faudra à cette expression ajouter celle-ci :

$$\Delta \frac{d'l}{dt^2} = -\frac{3m'}{\mu} an^2 \left[\frac{dA}{da'} e \sin(2l' - l - \varpi) + \left(\frac{dB}{da'} + \frac{4a}{a'^3} \right) e' \sin(2l' - l - \varpi') \right] \delta\alpha' \\ - \frac{3m'}{\mu} an^2 \left[A e \cos(2l' - l - \varpi) + \left(B - \frac{2a}{a'^2} \right) e' \cos(2l' - l - \varpi') \right] 2\delta l'.$$

La seconde ligne de cette expression est plus importante que la première, parce que dans $\delta l'$ le diviseur $2n'' - n' - \alpha'$ ou $2n'' - n' - \alpha''$ entre au carré, tandis que dans $\delta\alpha'$ il n'entre qu'à la première puissance : en confondant $\delta l'$ avec $\delta\rho'$ on a déjà négligé des quantités de même ordre que $\delta\alpha'$. Or, dans cette seconde ligne, outre le facteur e ou e' qui est en évidence, il entre un facteur e' ou e'' introduit par $\delta l'$. Les termes de la seconde expression contiennent donc tous un facteur tel que $\frac{ee'}{(2n'' - n' - \alpha')^2}$, tandis que dans la première il entre seulement le facteur $\frac{1}{2n'' - n'}$. On peut donc se borner à faire varier e' et ϖ' .

En résumé, pour obtenir dans $\frac{d'l}{dt^2}$ les termes les plus importants parmi ceux qui proviennent des termes du premier ordre de $R_{(0,1)}$, on peut réduire $R_{(0,1)}$ au terme unique $\left(B - \frac{2a}{a'^2} \right) e' \cos(2l' - l - \varpi')$, et y faire varier seulement les éléments e' et ϖ' .

Le même raisonnement fait voir qu'il n'y a rien à prendre parmi les termes du premier ordre de $R_{(0,2)}$. En effet, les arguments de ces termes sont de la forme $i(l'' - l) \pm l''$, et pour produire l'angle L il faudrait les combiner avec d'autres de la forme $k(l'' - l') \pm l''$ ou $k(l' - l) \pm l'$ convenablement choisis dans les valeurs de δa , δl , etc. Or il n'y a de petits diviseurs que pour les termes dont l'argument est $2l'' - l'$ ou $2l' - l$, et aucun de ces deux arguments combiné avec $i(l'' - l) \pm l''$ ne peut donner $l - 3l' + 2l''$.

Si l'on prenait dans $R_{(0,1)}$ et $R_{0,2}$ les termes du premier ordre autres que ceux en $2l' - l$ et $2l'' - l'$, ils conduiraient aussi, par les variations des éléments e , ϖ , e' , ..., à des termes indépendants des excentricités, mais ne présentant pas de petits diviseurs, ce qui permet de les négliger.

Quant aux autres parties de la fonction Ω , elles ne peuvent donner aucun terme en L ; en effet, dans $R_{(0,1)}$, $R_{(0,2)}$ et V il n'entre que les éléments du premier satellite avec ceux du quatrième et ceux du Soleil : il n'y aurait donc à faire varier que les quantités a , l , e , ...; or les variations de ces quantités ne contiennent pas à la fois l' et l'' dans leurs arguments.

Finalement, les seuls termes en L qu'il y ait lieu de considérer parmi ceux qui

proviennent des termes du premier ordre de Ω , seront donnés, pour le premier satellite, par la formule

$$\Delta \frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{3m'm''}{\mu\mu'} aa' n^2 \frac{n'}{2n'' - n'} A' \left(B - \frac{2a}{a'^2} \right) \sin L.$$

22. Si nous comparons la formule précédente aux formules (1) et (2) du n° 20, nous verrons qu'on peut se borner à la considérer seule. En effet, les termes des formules (1) et (2) ne contiennent pas de petit diviseur : ils sont du même ordre d'importance que ceux qui proviendraient des termes du premier ordre négligés dans $R_{(0,1)}$ et $R_{(0,2)}$.

Par des raisonnements semblables, on reconnaîtra que pour obtenir les principales inégalités de la longitude moyenne du second satellite, parmi celles qui dépendent de l'angle L , il suffit de prendre celles qui proviennent des termes du premier ordre que contiennent les deux fonctions $R_{(1,0)}$ et $R_{(1,2)}$, en se bornant aux deux arguments $2l' - l$ et $2l'' - l'$. Quand on considère les termes en $2l' - l$ que présente $R_{(1,0)}$, il faut y associer, pour produire l'angle L , des inégalités dépendantes de l'angle $2l'' - l'$, et de même aux termes en $2l'' - l'$ de $R_{(1,2)}$ on ne peut associer que des termes en $2l' - l$: donc dans les deux cas il n'y aura lieu de faire varier que les éléments du second satellite, et on verra, comme plus haut, qu'il suffit de faire varier les deux éléments e' et ϖ' . On prendra ainsi

$$R_{(1,0)} = \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) e' \cos(2l' - l - \varpi')$$

avec les variations correspondantes

$$\begin{aligned} \delta e' &= \frac{m'' a'}{\mu'} \frac{n'}{2n'' - n'} A' \cos(2l'' - l' - \varpi'), \\ e' \delta \varpi' &= \frac{m'' a'}{\mu'} \frac{n'}{2n'' - n'} A' \sin(2l'' - l' - \varpi'), \end{aligned}$$

et

$$R_{(1,2)} = A' e' \cos(2l'' - l' - \varpi')$$

avec les variations correspondantes

$$\begin{aligned} \delta e' &= \frac{ma'}{\mu'} \frac{n'}{2n' - n} \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) \cos(2l' - l - \varpi'), \\ e' \delta \varpi' &= \frac{ma'}{\mu'} \frac{n'}{2n' - n} \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) \sin(2l' - l - \varpi'); \end{aligned}$$

et il viendra

$$\begin{aligned} \Delta \frac{d^2 l'}{dt^2} &= - \frac{6mm''}{\mu'^2} a'^2 n'^2 \frac{n'}{2n'' - n'} A' \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) \sin L, \\ &\quad - \frac{3mm''}{\mu'^2} a'^2 n'^2 \frac{n'}{2n'' - n} A' \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) \sin L. \end{aligned}$$

Enfin, pour le troisième satellite, il suffira d'avoir égard aux termes de $R_{(2,1)}$ dont l'argument est $2l'' - l'$ et d'y faire varier encore les éléments e' et ϖ' du second satellite. On prendra en conséquence

$$R_{(2,1)} = A' e' \cos(2l'' - l' - \varpi')$$

et les variations

$$\begin{aligned} \delta e' &= \frac{ma'}{\mu'} \frac{n'}{2n' - n} \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) \cos(2l' - l - \varpi'), \\ e' \delta \varpi' &= \frac{ma'}{\mu'} \frac{n'}{2n' - n} \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) \sin(2l' - l - \varpi'), \end{aligned}$$

et on aura la formule

$$\Delta \frac{d^2 l''}{dt^2} = \frac{6mm'}{\mu' \mu''} a' a'' n'' \frac{n'}{2n' - n} A' \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) \sin L.$$

Remarque. — Il importe d'observer que les inégalités principales du second ordre des longitudes moyennes se déterminent au moyen des seules inégalités $\delta e'$ et $\delta \varpi'$, lesquelles, suivant la remarque du n° 12, sont aussi exactes que si les périodes se déplaçaient peu.

23. Les formules trouvées aux n°s 21 et 22 vont nous servir à démontrer les deux théorèmes du n° 19. En ne considérant dans chaque longitude moyenne que les inégalités où entrera le diviseur $(n - 3n' + 2n'')^2$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{d^2 l}{dt^2} &= \frac{3m'm''}{\mu' \mu''} aa' n^2 \frac{n'}{2n'' - n'} A' \left(B - \frac{2a}{a'^2} \right) \sin L, \\ \frac{d^2 l'}{dt^2} &= - \frac{9mm''}{\mu'^2} a'^2 n'^2 \frac{n'}{2n'' - n'} A' \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) \sin L, \\ \frac{d^2 l''}{dt^2} &= \frac{6mm'}{\mu' \mu''} a' a'' n'' \frac{n'}{2n' - n} A' \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) \sin L, \end{aligned}$$

en confondant les quantités $2n'' - n'$ et $2n' - n$; on en déduit

$$\begin{aligned} \frac{d^2 L}{dt^2} &= \frac{3a'f}{\mu'} \frac{n'}{2n'' - n'} A' \left[\left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) \left(\frac{m'm''}{a^2} + 9 \frac{mm''}{a'^2} + 4 \frac{mm'}{a''^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a'}{2a^2} - \frac{2a}{a'^2} \right) \frac{m'm''}{a^2} \right] \sin L. \end{aligned}$$

Si l'on calcule, au moyen des nombres que donne Laplace, le coefficient de $\sin L$ dans cette équation, on trouve qu'il est positif et approximativement égal à 0,000 007 783. Désignons-le par α^2 : l'angle L devra satisfaire à l'équation approchée

$$\frac{d^2 L}{dt^2} = \alpha^2 \sin L.$$

Une première intégration donne, en traitant α comme une constante absolue,

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)^2 = C - 2\alpha^2 \cos L,$$

C étant une constante qui dépend des circonstances initiales.

Pour que cette nouvelle équation soit possible, il faut que le second membre soit positif, et par suite que l'on ait $\cos L < \frac{C}{2\alpha^2}$.

1° Si l'on a $\frac{C}{2\alpha^2} > 1$, la condition sera toujours remplie, et il n'en résulte pas de limites pour l'angle L , qui pourra alors croître indéfiniment.

2° Si l'on a $\frac{C}{2\alpha^2} < 1$ et > -1 , posons $\frac{C}{2\alpha^2} = \cos \omega$, et prenons pour ω le plus petit angle positif qui réponde à cette valeur; on aura toujours $\cos L < \cos \omega$; par suite, l'angle L , abstraction faite, s'il y a lieu, des circonférences entières positives ou négatives qu'il peut contenir, devra toujours avoir sa valeur absolue comprise entre ω et $2\pi - \omega$, et ne pourra qu'osciller autour de la demi-circonférence.

- L'hypothèse $\frac{C}{2\alpha^2} < -1$ n'est pas admissible, car il n'y aurait aucune valeur réelle possible pour l'angle L . Nous allons reconnaître que la première hypothèse doit aussi être rejetée, comme incompatible avec les observations.

Supposons en effet qu'on ait $C > 2\alpha^2$. On tire de l'équation

$$dt = \pm \frac{dL}{\sqrt{C - 2\alpha^2 \cos L}};$$

posons $L = \pi \pm x$, le signe de x étant celui du radical, il viendra

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{C + 2\alpha^2 \cos x}}.$$

Le temps que mettra l'angle x à croître depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{2}$ sera donné par la formule

$$t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{C + 2\alpha^2 \cos x}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\alpha^2}},$$

puisque $\cos x$ est positif dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{2}$; ce temps est donc moindre que $\frac{\pi}{2\alpha\sqrt{2}}$. En prenant $\alpha^2 = 0,000\,007\,783$, on trouve approximativement

$$\frac{\pi}{2\alpha\sqrt{2}} = 400 \text{ jours.}$$

Ainsi, en supposant qu'on eût $C > 2\alpha^2$, l'angle x n'emploierait pas deux années pour arriver au quart de la circonférence : or cet angle a toujours paru nul ou très-petit. La seule hypothèse admissible est donc la seconde, et par suite l'angle L ne peut qu'osciller de part et d'autre de la demi-circonférence, qui est par conséquent sa valeur moyenne, abstraction faite des quantités périodiques.

La valeur moyenne de L est

$$n_0 t - 3n'_0 t + 2n''_0 t + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'';$$

on a donc

$$n_0 t - 3n'_0 t + 2n''_0 t + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'' = \pi,$$

ce qui démontre le second théorème. Le premier en résulte immédiatement : car l'égalité précédente, ayant lieu pour une époque quelconque, se partage dans les deux suivantes :

$$\varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'' = \pi, \quad n_0 - 3n'_0 + 2n''_0 = 0.$$

Les deux théorèmes n'ont lieu qu'entre les valeurs moyennes des diverses quantités, en sorte qu'à une époque quelconque les expressions $l - 3l' + 2l''$, $n - 3n' + 2n''$ ne sont pas égales respectivement aux nombres π et 0 ; mais elles n'en diffèrent que par des termes périodiques, qui les font osciller autour de ces valeurs moyennes. Il n'est donc pas nécessaire qu'à l'origine du mouvement on ait eu rigoureusement les deux relations

$$l - 3l' + 2l'' = \pi, \quad n - 3n' + 2n'' = 0;$$

ce qui aurait exigé pour les trois premiers satellites des positions relatives très-particulières. Il faut pourtant que ces relations aient été assez approchées, afin que, par suite des attractions mutuelles de ces trois corps, elles aient pu s'établir rigoureusement entre les valeurs moyennes. Ainsi qu'on l'a vu plus haut, les conditions que doivent remplir les valeurs des éléments à l'époque, quelle qu'elle soit, que l'on prend pour origine du temps, sont exprimées par les deux inégalités $C < 2\alpha^2$, $C > -2\alpha^2$. Or l'équation

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)^2 = C - 2\alpha^2 \cos L$$

donne, pour $t = 0$,

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)^2_{t=0} = C - 2\alpha^2 \cos(\varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'')$$

la condition $C < 2\alpha^2$ revient donc à

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)^2_{t=0} < 4\alpha^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''),$$

et, par suite, il faut que la valeur initiale de $\frac{dL}{dt}$, que l'on peut confondre avec celle de $n - 3n' + 2n''$, ait été primitivement comprise entre les limites

$$+ 2\alpha \sin \frac{1}{2}(\varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'') \quad \text{et} \quad - 2\alpha \sin \frac{1}{2}(\varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'').$$

La condition $C > -2\alpha^2$ n'ajoute rien à la précédente.

On a vu, au n° 16, que les deux principales inégalités périodiques du second satellite, provenant des actions du premier et du troisième, se réunissent en un seul terme, en vertu de la relation qui lie les longitudes; si cette relation résultait seulement de l'observation, on ne serait pas en droit d'affirmer que ces deux inégalités ne se sépareront jamais dans la suite des siècles, et on devrait les distinguer dans les Tables : il était donc très-intéressant, pour la théorie du second satellite, de reconnaître qu'elle n'est pas accidentelle et temporaire, mais la conséquence d'une loi.

Les théorèmes ont lieu encore lorsque l'on considère les longitudes moyennes synodiques, car la position de l'origine des longitudes disparaît dans l'équation

$$l - 3l' + 2l'' = \pi.$$

Il résulte de là que les trois premiers satellites ne peuvent jamais être éclipsés à la fois, et que dans les éclipses simultanées du second et du troisième, le premier est en conjonction et peut, par conséquent, produire une éclipse de Soleil pour Jupiter.

24. L'équation

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{C + 2\alpha^2 \cos x}}$$

détermine l'amplitude x de l'oscillation de l'angle L autour de π ; l'angle x étant toujours très-petit, suivant les observations, on peut remplacer $\cos x$ par $1 - \frac{x^2}{2}$, ce qui donnera l'équation

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{C + 2\alpha^2 - \alpha^2 x^2}}.$$

Désignons par D^2 la constante arbitraire $\frac{C + 2\alpha^2}{\alpha^2}$ et par E une autre arbitraire, il viendra

$$x = D \sin(\alpha t + E),$$

∴, par suite, on aura

$$L = \pi \pm D \sin(\alpha t + E),$$

en se bornant à considérer l'inégalité qui provient des termes du second ordre par rapport aux masses.

La période de cette inégalité est $\frac{2\pi}{\alpha} = 2256$ jours ou un peu plus de six ans; quant aux deux arbitraires D, E, elles remplacent celles que suppriment les deux équations

$$\varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'' = \pi, \quad n - 3n' + 2n'' = 0,$$

ce qui rétablit le nombre de constantes exigé par les équations différentielles.

Reprenons maintenant les valeurs de $\frac{d^2 l}{dt^2}$, $\frac{d^2 l'}{dt^2}$, $\frac{d^2 l''}{dt^2}$ données au n° 23; les inégalités qu'elles fournissent seraient les plus considérables parmi celles qui affectent les longitudes moyennes, si elles se présentaient en effet avec le dénominateur $(n - 3n' + 2n'')^2$. Mais on vient de voir que $L = \pi + D \sin(\alpha t + E)$, D pouvant être positif ou négatif; on aura par suite

$$\sin L = -\sin[D \sin(\alpha t + E)],$$

quantité que l'on peut confondre avec $-D \sin(\alpha t + E)$. D'après cela, si l'on pose, pour abréger,

$$P = \frac{3a'f}{\mu'} \frac{n'}{2n'' - n'} A' \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right),$$

et qu'on néglige la petite différence des deux quantités $\frac{a'}{2a^2}$, $\frac{2a}{a'^2}$, il viendra pour les longitudes moyennes des trois premiers satellites les inégalités

$$\delta l = \frac{m' m''}{a^2} \frac{PD}{\alpha^2} \sin(\alpha t + E), \quad \delta l' = -\frac{3mm''}{a'^2} \frac{PD}{\alpha^2} \sin(\alpha t + E), \quad \delta l'' = \frac{2mm'}{a''^2} \frac{PD}{\alpha^2} \sin(\alpha t + E).$$

Laplace désigne sous le nom de *libration* l'inégalité $\frac{PD}{\alpha^2} \sin(\alpha t + E)$, qui se répartit ainsi entre les trois premiers satellites suivant un rapport dépendant à la fois de leurs masses et de leurs distances à Jupiter. Cette inégalité est probablement insensible, car toutes les recherches qu'a faites Delambre pour la démêler dans les observations ont été infructueuses. Il faut en conclure que les mouvements primitifs des trois premiers satellites ont fort approché de satisfaire aux deux égalités

$$l - 3l' + 2l'' = \pi, \quad n - 3n' + 2n'' = 0:$$

on a, en effet, $D^2 = \frac{C + 2\alpha^2}{\alpha^2}$, et pour que D soit très-petit, il faut que C soit presque égal à $-2\alpha^2$; par conséquent l'angle ω défini par $\cos \omega = \frac{C}{2\alpha^2}$, sera très-rapproché de la demi-circonférence, et on a vu que l'angle L doit en être encore plus voisin.

25. Les théorèmes qui lient les moyens mouvements et les longitudes moyennes des trois premiers satellites résultent uniquement, comme on l'a vu, des attrac-

tions mutuelles de ces astres : il importe donc de s'assurer que les actions étrangères ne viendront pas en troubler l'exactitude, et qu'ils continuent de subsister malgré les altérations qu'elles pourraient produire dans les moyens mouvements. Considérons, en effet, une inégalité à très-longue période qui affecte les longitudes moyennes, et qui soit due à une cause quelconque, connue ou inconnue, comme les variations séculaires de l'orbite et de l'équateur de Jupiter, ou la résistance d'un milieu très-rare : soient $\lambda \sin(it + o)$, $\lambda' \sin(it + o)$, $\lambda'' \sin(it + o)$ les termes qui en résulteront dans les trois longitudes moyennes. Au lieu de l'équation approchée $\frac{d^2 L}{dt^2} = \alpha^2 \sin L$, nous prendrons

$$\frac{d^2 L}{dt^2} = \alpha^2 \sin L - i^2 (\lambda - 3\lambda' + 2\lambda'') \sin(it + o),$$

en conservant dans le second membre les termes d'argument $it + o$, malgré la petitesse de leurs coefficients, puisque par hypothèse ces termes deviennent sensibles, par l'intégration, dans les valeurs des longitudes moyennes; ce sont d'ailleurs les seuls qu'il nous soit utile d'introduire au second membre, mais on n'augmenterait pas la difficulté d'intégration en y ajoutant tous ceux qu'on néglige. Si l'on pose $L = \pi + x$ et que l'on confonde $\sin x$ avec x , il vient

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha^2 x + i^2 (\lambda - 3\lambda' + 2\lambda'') \sin(it + o) = 0,$$

et cette équation donnera, si l'on y regarde les divers coefficients comme des constantes absolues,

$$x = D \sin(\alpha t + E) + \frac{i^2}{i^2 - \alpha^2} (\lambda - 3\lambda' + 2\lambda'') \sin(it + o).$$

Le premier terme de cette valeur est celui dont on a déjà tenu compte, et quant au second, qui donnerait une espèce d'équation séculaire, le facteur $\frac{i^2}{i^2 - \alpha^2}$ le rend négligeable, parce que le nombre i est très-petit et beaucoup plus petit que α . Ainsi la partie de x qui provient de la cause perturbatrice considérée est tout à fait insensible, et, par suite, les théorèmes subsistent.

Pour qu'il en soit ainsi, malgré les altérations que cette cause produit dans le moyen mouvement de chaque satellite, il faut que les inégalités qui en résultent soient telles, que celle du premier, augmentée de deux fois celle du troisième, soit égale à trois fois celle du second. Ce rapport n'existe pas entre les termes $\lambda \sin(it + o)$, $\lambda' \sin(it + o)$, $\lambda'' \sin(it + o)$, que fournit la première approximation, mais la libration des satellites modifie d'une manière remarquable ces inégalités, et les amène à satisfaire à cette loi. Prenons en effet dans la valeur de $\frac{d^2 l}{dt^2}$

les termes en $\sin L$ calculés plus haut, savoir : $\frac{d'l}{dt} = \frac{m' m''}{a^2} P \sin L$; l'angle $L = l - 3l' + 2l''$ contient dans son expression des termes en $it + o$, lesquels, par substitution, feront apparaître de nouveau cet argument dans l . Pour obtenir ces nouveaux termes, il suffira de remplacer L par la valeur $\pi + \frac{i^2}{i^2 - \alpha^2}(\lambda - 3\lambda' + 2\lambda'') \sin(it + o)$, ou $\sin L$ par $-\frac{i^2}{i^2 - \alpha^2}(\lambda - 3\lambda' + 2\lambda'') \sin(it + o)$. Il en résultera dans l l'inégalité

$$\frac{m' m''}{a^2} P \frac{1}{i^2 - \alpha^2} (\lambda - 3\lambda' + 2\lambda'') \sin(it + o),$$

laquelle n'est pas négligeable, parce que le dénominateur $i^2 - \alpha^2$ se réduit sensiblement à $-\alpha^2$, quantité dont la valeur absolue est du même ordre de grandeur que le facteur $\frac{m' m''}{a^2} P$ (si l'on fait usage des nombres de Laplace, on trouve que l'expression $\frac{m' m''}{a^2} P \frac{1}{\alpha^2}$ est comprise entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$).

En opérant de même pour le second et le troisième satellite, et ajoutant les termes nouveaux aux termes primitifs, on trouve que les inégalités dont il s'agit sont données finalement par les formules

$$\begin{aligned} \delta l &= \left(\lambda + \frac{m' m''}{a^2} P \frac{\lambda - 3\lambda' + 2\lambda''}{i^2 - \alpha^2} \right) \sin(it + o), \\ \delta l' &= \left(\lambda' - \frac{3mm''}{a'^2} P \frac{\lambda - 3\lambda' + 2\lambda''}{i^2 - \alpha^2} \right) \sin(it + o), \\ \delta l'' &= \left(\lambda'' + \frac{2mm'}{a''^2} P \frac{\lambda - 3\lambda' + 2\lambda''}{i^2 - \alpha^2} \right) \sin(it + o). \end{aligned}$$

On en tire

$$\delta l - 3\delta l' + 2\delta l'' = (\lambda - 3\lambda' + 2\lambda'') \left(1 + \frac{\alpha^2}{i^2 - \alpha^2} \right) \sin(it + o);$$

or le facteur $1 + \frac{\alpha^2}{i^2 - \alpha^2}$ se réduit à zéro si l'on peut négliger i^2 à côté de α^2 . Ainsi, par les actions mutuelles des trois premiers satellites, les inégalités à longues périodes de leurs longitudes moyennes se coordonnent de manière à satisfaire à l'équation qui régit les moyens mouvements, avec une exactitude d'autant plus grande que la période est plus longue.

On devra donc tenir compte de cette remarquable modification dans le calcul des inégalités de cette espèce, et en particulier dans le calcul des *équations séculaires* des satellites. Si la période n'est pas très-longue, les inégalités approcheront moins de satisfaire à la relation précédente, mais la correction pourra cependant être encore très-sensible, et pour qu'il y ait lieu de l'appliquer, il suffit que le

nombre i^2 soit au moins du même ordre de petitesse que α^2 , c'est-à-dire que la période soit d'au moins six ans.

L'équation annuelle est dans ce cas, puisqu'elle a pour période une année de Jupiter. Elle a été trouvée au n° 10 sous la forme $-\frac{3\pi}{\mu} \frac{\alpha^2}{\mathfrak{A}^2} \frac{n}{\mathfrak{C}} \mathfrak{C} \sin(\mathfrak{L} - \Pi)$, ce qui donne

$$\lambda = -\frac{3\pi}{\mu} \frac{\alpha^2}{\mathfrak{A}^2} \frac{n}{\mathfrak{C}} \mathfrak{C} = -\frac{3\pi \mathfrak{C}}{n}.$$

On aura donc

$$\lambda - 3\lambda' + 2\lambda'' = -3\pi \mathfrak{C} \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n'} + \frac{2}{n''} \right),$$

et, par suite, les équations annuelles des longitudes deviendront

$$\begin{aligned} \delta l &= -3\pi \mathfrak{C} \left[\frac{1}{n} + \frac{m' m''}{\alpha^2} \mathbf{P} \frac{1}{\mathfrak{C}^2 - \alpha^2} \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n'} + \frac{2}{n''} \right) \right] \sin(\mathfrak{L} - \Pi), \\ \delta l' &= -3\pi \mathfrak{C} \left[\frac{1}{n'} - \frac{3 m m''}{\alpha'^2} \mathbf{P} \frac{1}{\mathfrak{C}^2 - \alpha'^2} \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n'} + \frac{2}{n''} \right) \right] \sin(\mathfrak{L} - \Pi), \\ \delta l'' &= -3\pi \mathfrak{C} \left[\frac{1}{n''} + \frac{2 m m'}{\alpha''^2} \mathbf{P} \frac{1}{\mathfrak{C}^2 - \alpha''^2} \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n'} + \frac{2}{n''} \right) \right] \sin(\mathfrak{L} - \Pi). \end{aligned}$$

Ces expressions se simplifient un peu si, outre la relation $n - 3n' + 2n'' = 0$, on admet les deux suivantes, qui sont beaucoup moins exactes, $n = 2n'$, $n' = 2n''$. C'est ce que fait Laplace.

CHAPITRE IV.

INÉGALITÉS SÉCULAIRES ET A LONGUES PÉRIODES DES EXCENTRICITÉS ET DES LONGITUDES DES PÉRIJUVES.

26. Dans l'étude du mouvement des planètes, les formules qui donnent le développement de leurs inégalités séculaires suivant les puissances du temps peuvent suffire aux besoins de l'Astronomie; et c'est seulement pour démontrer la stabilité du système solaire que l'on a recours à une intégration plus exacte des équations différentielles qui déterminent ces inégalités. Mais des formules analogues seraient trop peu approchées pour le monde de Jupiter; car la promptitude des révolutions y rend sensibles au bout de peu d'années les altérations dans la forme et la position des orbites, qui ne se développent que par la suite des siècles dans le système planétaire. Nous devons, en conséquence, dans les équations que nous obtenons, regarder les éléments comme variables aussi bien dans les seconds membres

que dans les premiers, et nous aurons ainsi à intégrer un système d'équations différentielles simultanées.

Dans la théorie des inégalités séculaires des planètes, on se borne à considérer les termes des fonctions perturbatrices qui sont explicitement indépendants du temps. Supposons que la variation complète de l'élément p soit donnée par la formule $\frac{dp}{dt} = A + B$, la partie A ne contenant que les éléments, et la partie B étant toute périodique : on aura rigoureusement

$$p = \text{const.} + \int A dt + \int B dt.$$

En général, pour de très-grandes valeurs de t , tandis que la partie $\int A dt$ peut prendre de grandes valeurs, la partie $\int B dt$ ne donnera jamais qu'une quantité assez petite; ce qui permet de la négliger et de poser en conséquence, pour la recherche des inégalités séculaires, l'équation $\frac{dp}{dt} = A$. Mais cela ne sera plus permis si la partie $\int B dt$ acquiert par l'intégration de petits diviseurs, ou si certains termes de B présentent de grands coefficients.

En conséquence, nous devons conserver dans nos équations, *outre les termes non périodiques, les termes périodiques dépendants des angles $2l' - l$, $2l'' - l'$ ou de leurs multiples, ceux qui contiennent la longitude $\mathcal{L}$ du Soleil sans combinaison avec une longitude de satellite, et enfin ceux qui contiennent le coefficient K , même lorsqu'il y entre une longitude de satellite.* De cette manière, nos équations donneront en même temps les inégalités séculaires et les inégalités à longues périodes.

Quand on se borne aux termes du second ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, les fonctions perturbatrices ne contiennent aucun mélange des quantités e , ϖ avec les quantités φ et θ : il en résulte que les équations différentielles qui déterminent la forme et la position des orbites se partagent en deux groupes distincts et indépendants, se rapportant, le premier aux excentricités et aux longitudes des périjoves, et le second aux inclinaisons et aux longitudes des nœuds. Nous nous occuperons successivement de chacun de ces deux groupes dans ce chapitre et dans le suivant.

27. Les formules générales qui expriment les variations des éléments e et ϖ peuvent encore, si l'on veut ne retenir que des termes comparables, se réduire aux suivantes :

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{na'e} \frac{d\Omega}{d\varpi}, \quad \frac{d\varpi}{dt} = \frac{1}{na'e} \frac{d\Omega}{de};$$

en conséquence, les seuls termes utiles de la fonction Ω seront donnés, pour le

premier satellite, par les expressions suivantes :

$$R_{(0,1)} = \frac{1}{4} e^2 (A_1^{(0)} + A_2^{(0)}) + \frac{1}{2} ee' \cos(\varpi - \varpi') (A_1^{(1)} - A_1^{(2)} - A_2^{(1)}) + Ae \cos(2l' - l - \varpi),$$

ou plutôt, en faisant usage des relations qui lient les coefficients $A^{(i)}$ et $B^{(i)}$,

$$R_{(0,1)} = \frac{1}{8} B^{(1)} e^2 - \frac{1}{4} B^{(2)} ee' \cos(\varpi - \varpi') + Ae \cos(2l' - l - \varpi);$$

$$R_{(0,2)} = \frac{1}{8} \dot{B}^{(1)} e^2 - \frac{1}{4} \dot{B}^{(2)} ee'' \cos(\varpi - \varpi'');$$

$$R_{(0,3)} = \frac{1}{8} \ddot{B}^{(1)} e^2 - \frac{1}{4} \ddot{B}^{(2)} ee''' \cos(\varpi - \varpi''');$$

$$R_{(0,4)} = \frac{3}{8} \frac{a^2 e^2}{\mathfrak{A}^3} + \frac{15}{8} \frac{a^2 e^2}{\mathfrak{A}^3} \cos(2\mathfrak{L} - 2\varpi);$$

$$V = \frac{K}{2a^3} e^2 + \frac{K}{a^3} e \cos(l - \varpi).$$

On aura, par conséquent, les deux équations

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= -\frac{m' an}{\mu} \frac{B^{(2)}}{4} e' \sin(\varpi - \varpi') - \frac{m'' an}{\mu} \frac{\dot{B}^{(2)}}{4} e'' \sin(\varpi - \varpi'') - \frac{m''' an}{\mu} \frac{\ddot{B}^{(2)}}{4} e''' \sin(\varpi - \varpi''') \\ &\quad - \frac{m' an}{\mu} A \sin(2l' - l - \varpi) - \frac{15}{4} \frac{\mathfrak{M} an}{\mu} \frac{a^2}{\mathfrak{A}^3} e \sin(2\mathfrak{L} - 2\varpi) - \frac{Kn}{a^2 \mu} \sin(l - \varpi); \\ e \frac{d\varpi}{dt} &= \left(\frac{m' an}{\mu} \frac{B^{(1)}}{4} + \frac{m'' an}{\mu} \frac{\dot{B}^{(1)}}{4} + \frac{m''' an}{\mu} \frac{\ddot{B}^{(1)}}{4} + \frac{3}{4} \frac{\mathfrak{M} an}{\mu} \frac{a^2}{\mathfrak{A}^3} + \frac{Kn}{a^2 \mu} \right) e \\ &\quad - \frac{m' an}{\mu} \frac{B^{(2)}}{4} e' \cos(\varpi - \varpi') - \frac{m'' an}{\mu} \frac{\dot{B}^{(2)}}{4} e'' \cos(\varpi - \varpi'') - \frac{m''' an}{\mu} \frac{\ddot{B}^{(2)}}{4} e''' \cos(\varpi - \varpi''') \\ &\quad + \frac{m' an}{\mu} A \cos(2l' - l - \varpi) + \frac{15}{4} \frac{\mathfrak{M} an}{\mu} \frac{a^2}{\mathfrak{A}^3} e \cos(2\mathfrak{L} - 2\varpi) + \frac{Kn}{a^2 \mu} \cos(l - \varpi). \end{aligned}$$

Posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} (0,1) &= \frac{m' an}{\mu} \frac{B^{(1)}}{4}, & (0,2) &= \frac{m'' an}{\mu} \frac{\dot{B}^{(1)}}{4}, & (0,3) &= \frac{m''' an}{\mu} \frac{\ddot{B}^{(1)}}{4}, \\ [0,1] &= \frac{m' an}{\mu} \frac{B^{(2)}}{4}, & [0,2] &= \frac{m'' an}{\mu} \frac{\dot{B}^{(2)}}{4}, & [0,3] &= \frac{m''' an}{\mu} \frac{\ddot{B}^{(2)}}{4}, \\ (0) &= \frac{Kn}{a^2 \mu}, & [0] &= \frac{3}{4} \frac{\mathfrak{M} n}{\mu} \frac{a^2}{\mathfrak{A}^3}; \end{aligned}$$

et au lieu des variables $e, \varpi, e', \varpi', \dots$, introduisons les variables $h, k, h', k', \dots$, liées aux anciennes par les équations

$$h = e \sin \varpi, \quad k = e \cos \varpi, \quad h' = e' \sin \varpi', \quad k' = e' \cos \varpi', \quad \text{etc.}$$

On aura les formules

$$\frac{dh}{dt} = \sin \varpi \frac{de}{dt} + \cos \varpi \cdot e \frac{d\varpi}{dt}, \quad \frac{dk}{dt} = \cos \varpi \frac{de}{dt} - \sin \varpi \cdot e \frac{d\varpi}{dt},$$

et, par suite, en remplaçant $\frac{de}{dt}$, $e \frac{d\varpi}{dt}$ par leurs expressions,

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \{ (0,1) + (0,2) + (0,3) + (0) + [0] \} k - [0,1] k' - [0,2] k'' - [0,3] k''' \\ &\quad + \frac{m' a n}{\mu} A \cos(2l' - l) + (0) \cos l + 5[0] (k \cos 2\ell + h \sin 2\ell), \\ \frac{dk}{dt} &= - \{ (0,1) + (0,2) + (0,3) + (0) + [0] \} h + [0,1] h' + [0,2] h'' + [0,3] h''' \\ &\quad - \frac{m' a n}{\mu} A \sin(2l' - l) - (0) \sin l - 5[0] (k \sin 2\ell - h \cos 2\ell). \end{aligned} \right.$$

Pour le second satellite, les diverses parties de la fonction perturbatrice seront

$$R_{(1,0)} = \frac{1}{8} B^{(1)} e'^2 - \frac{1}{4} B^{(2)} e e' \cos(\varpi - \varpi') + \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) e' \cos(2l' - l - \varpi');$$

$$R_{(1,2)} = \frac{1}{8} B'^{(1)} e'^2 - \frac{1}{4} B'^{(2)} e' e'' \cos(\varpi' - \varpi'') + A' e' \cos(2l'' - l' - \varpi');$$

$$R_{(1,3)} = \frac{1}{8} \dot{B}^{(1)} e'^2 - \frac{1}{4} \dot{B}^{(2)} e' e'' \cos(\varpi' - \varpi'');$$

$R_{(1,0)}$ et V' se déduisent de $R_{(0,0)}$ et V en remplaçant les éléments du premier satellite par ceux du second.

Si l'on pose de même

$$\begin{aligned} (1,0) &= \frac{m a' n'}{\mu'} \frac{B^{(1)}}{4}, & (1,2) &= \frac{m'' a' n'}{\mu'} \frac{B'^{(1)}}{4}, & (1,3) &= \frac{m'' a' n'}{\mu'} \frac{\dot{B}^{(1)}}{4}, \\ [1,0] &= \frac{m a' n'}{\mu'} \frac{B^{(2)}}{4}, & [1,2] &= \frac{m'' a' n'}{\mu'} \frac{B'^{(2)}}{4}, & [1,3] &= \frac{m'' a' n'}{\mu'} \frac{\dot{B}^{(2)}}{4}, \\ (1) &= \frac{K n'}{a'^2 \mu'}, & [1] &= \frac{3}{4} \frac{\mathcal{N} n'}{\mu'} \frac{a'^3}{a^3}, \end{aligned}$$

on aura les deux équations

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \frac{dh'}{dt} &= \{ (1,0) + (1,2) + (1,3) + (1) + [1] \} h' - [1,0] h - [1,2] h'' - [1,3] h''' \\ &\quad + \frac{m a' n'}{\mu'} \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) \cos(2l' - l) + \frac{m'' a' n'}{\mu'} A' \cos(2l'' - l') + (1) \cos l' \\ &\quad + 5[1] (h' \cos 2\ell + h' \sin 2\ell), \\ \frac{dh'}{dt} &= - \{ (1,0) + (1,2) + (1,3) + (1) + [1] \} h' + [1,0] h + [1,2] h'' + [1,3] h''' \\ &\quad - \frac{m a' n'}{\mu'} \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) \sin(2l' - l) - \frac{m'' a' n'}{\mu'} A' \sin(2l'' - l') - (1) \sin l' \\ &\quad - 5[1] (h' \sin 2\ell - h' \cos 2\ell). \end{aligned} \right.$$

Pour le troisième satellite, on devra prendre

$R_{(2,0)}$ identique à $R_{(0,2)}$, sauf le changement de e en e'' et *vice versa*,

$R_{(2,1)}$ identique à $R_{(1,2)}$, sauf un accent ajouté à chaque lettre,

$$R_{(2,2)} = \frac{1}{8} B''^{(1)} e''^2 - \frac{1}{4} B''^{(2)} e'' e'' \cos(\varpi'' - \varpi'');$$

et en posant de même

$$\begin{aligned} (2,0) &= \frac{ma''n''}{\mu''} \frac{\dot{B}^{(1)}}{4}, & (2,1) &= \frac{m'a''n''}{\mu''} \frac{B'^{(1)}}{4}, & (2,3) &= \frac{m''a''n''}{\mu''} \frac{B''^{(1)}}{4}, \\ [2,0] &= \frac{ma''n''}{\mu''} \frac{\dot{B}^{(2)}}{4}, & [2,1] &= \frac{m'a''n''}{\mu''} \frac{B'^{(2)}}{4}, & [2,3] &= \frac{m''a''n''}{\mu''} \frac{B''^{(2)}}{4}, \\ (2) &= \frac{Kn''}{a''^2 \mu''}, & [2] &= \frac{3}{4} \frac{\mathfrak{M} n'' a''^3}{\mu''^2}, \end{aligned}$$

on obtiendra les deux équations

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \frac{dh''}{dt} &= \{(2,0) + (2,1) + (2,3) + (2) + [2]\} h'' - [2,0] h - [2,1] h' - [2,3] h'' \\ &\quad + \frac{m'a''n''}{\mu''} \left(B' - \frac{a''}{2a'^2} \right) \cos(2l'' - l') + (2) \cos l'' + 5[2] (h'' \cos 2\xi + h'' \sin 2\xi), \\ \frac{dk''}{dt} &= -\{(2,0) + (2,1) + (2,3) + (2) + [2]\} h'' + [2,0] h + [2,1] h' + [2,3] h'' \\ &\quad - \frac{m'a''n''}{\mu''} \left(B' - \frac{a''}{2a'^2} \right) \sin(2l'' - l') - (2) \sin l'' - 5[2] (h'' \sin 2\xi - h'' \cos 2\xi). \end{aligned} \right.$$

Enfin pour le quatrième satellite on devra prendre

$R_{(3,0)}$ identique à $R_{(0,3)}$, sauf le changement de e en e'' et *vice versa*,

$R_{(3,1)}$ » $R_{(1,3)}$, » e' en e'' »

$R_{(3,2)}$ » $R_{(2,3)}$, » e'' en e'' »

et si l'on pose

$$\begin{aligned} (3,0) &= \frac{ma''n''}{\mu'''} \frac{\dot{B}^{(1)}}{4}, & (3,1) &= \frac{m'a''n''}{\mu'''} \frac{\dot{B}^{(1)}}{4}, & (3,2) &= \frac{m''a''n''}{\mu'''} \frac{B''^{(1)}}{4}, \\ [3,0] &= \frac{ma''n''}{\mu'''} \frac{\dot{B}^{(2)}}{4}, & [3,1] &= \frac{m'a''n''}{\mu'''} \frac{\dot{B}^{(2)}}{4}, & [3,2] &= \frac{m''a''n''}{\mu'''} \frac{B''^{(2)}}{4}, \\ (3) &= \frac{Kn''}{a''^2 \mu'''}, & [3] &= \frac{3}{4} \frac{\mathfrak{M} n'' a''^3}{\mu'''^2}, \end{aligned}$$

on aura les deux équations

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dh''}{dt} = \{(3,0) + (3,1) + (3,2) + (3) + [3]\} h''' - [3,0] h - [3,1] h' - [3,2] h'' \\ \quad + (3) \cos l'' + 5[3] (h''' \cos 2\varrho + h'' \sin 2\varrho), \\ \frac{dh''}{dt} = -\{(3,0) + (3,1) + (3,2) + (3) + [3]\} h''' + [3,0] h + [3,1] h' + [3,2] h'' \\ \quad - (3) \sin l'' - 5[3] (h''' \sin 2\varrho - h'' \cos 2\varrho). \end{cases}$$

28. Les équations (1), (2), (3), (4) forment un système de huit équations différentielles simultanées, dont l'intégration fournira des valeurs très-approchées des quantités h , k , h' , ... et par suite des excentricités et des longitudes des périjoves. On peut, dans ces équations, regarder les grands axes, et par suite les coefficients $(0,1)$, $[0,1]$, (0) , $[0]$, etc., comme des constantes absolues : en effet, les grands axes n'ont que des inégalités périodiques. Il est vrai que quelques-unes de ces inégalités dépendent des angles $2l' - l$ et $2l'' - l'$, et comme nous conservons dans nos équations les termes qui contiennent ces angles, on pourrait croire que les coefficients $(0,1)$, $[0,1]$, etc., devraient être remplacés par une partie constante, plus une partie dépendant des mêmes angles ; mais cette dernière peut être négligée, car elle contiendrait deux masses et une excentricité, tandis que les termes comme $\frac{m' an}{\mu} A \cos(2l' - l)$, par exemple, ne contiennent qu'une seule masse et sont indépendants des excentricités.

Pour la même raison, on peut ne pas tenir compte des inégalités des longitudes moyennes et prendre par exemple $l = nt + \varepsilon$, n et ε étant des constantes absolues : les termes proportionnels au temps qu'amènerait la partie ε peuvent être supposés renfermés dans nt , et les inégalités qui dépendent des angles $2l' - l$, $2l'' - l'$, ϱ ajouteraient aux termes primitifs d'autres termes contenant une masse et une excentricité de plus.

Pour obtenir les intégrales complètes du système des huit équations différentielles simultanées, nous commencerons par négliger dans chacune d'elles les termes affectés de sinus ou de cosinus, ce qui les rendra linéaires ; ayant trouvé les intégrales du système d'équations linéaires obtenu, nous ferons varier les constantes arbitraires amenées par l'intégration et nous obtiendrons ainsi les intégrales des équations différentielles complètes. Mais il ne faut voir dans cette marche qu'un procédé d'analyse et non une méthode d'approximation, car on peut observer que parmi les termes d'abord négligés il en est de plus importants que ceux que l'on conserve : par exemple, le terme $\frac{m' an}{\mu} A \cos(2l' - l)$ est du premier ordre par rapport aux masses et d'ordre zéro par rapport aux excentricités, tandis que

les termes comme $(0,1)k$ sont du premier ordre à la fois par rapport aux masses et aux excentricités.

Nous aurons donc à intégrer d'abord le système d'équations linéaires simultanées

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \{(0,1) + (0,2) + (0,3) + (0) + [0]\} k - [0,1] k' - [0,2] k'' - [0,3] k''', \\ \frac{dh'}{dt} &= \{(1,0) + (1,2) + (1,3) + (1) + [1]\} k' - [1,0] k - [1,2] k'' - [1,3] k''', \\ \frac{dh''}{dt} &= \{(2,0) + (2,1) + (2,3) + (2) + [2]\} k'' - [2,0] k - [2,1] k' - [2,3] k''', \\ \frac{dh'''}{dt} &= \{(3,0) + (3,1) + (3,2) + (3) + [3]\} k''' - [3,0] k - [3,1] k' - [3,2] k''; \\ \frac{dk}{dt} &= -\{(0,1) + (0,2) + (0,3) + (0) + [0]\} h + [0,1] h' + [0,2] h'' + [0,3] h''', \\ \frac{dk'}{dt} &= -\{(1,0) + (1,2) + (1,3) + (1) + [1]\} h' + [1,0] h + [1,2] h'' + [1,3] h''', \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

Ces équations sont celles qu'on obtiendrait si l'on cherchait seulement les inégalités séculaires.

29. Pour intégrer les équations (5), posons, suivant la méthode connue,

$$\begin{aligned} h &= M \sin(gt + \beta), & h' &= M' \sin(gt + \beta), & h'' &= M'' \sin(gt + \beta), & h''' &= M''' \sin(gt + \beta), \\ k &= M \cos(gt + \beta), & k' &= M' \cos(gt + \beta), & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \end{aligned}$$

ces valeurs donnent une solution, si les indéterminées M, M', M'', M''' et g satisfont aux quatre équations

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \{g - (0,1) - (0,2) - (0,3) - (0) - [0]\} M + [0,1] M' + [0,2] M'' + [0,3] M''' &= 0, \\ [1,0] M + \{g - (1,0) - (1,2) - (1,3) - (1) - [1]\} M' + [1,2] M'' + [1,3] M''' &= 0, \\ [2,0] M + [2,1] M' + \{g - (2,0) - (2,1) - (2,3) - (2) - [2]\} M'' + [2,3] M''' &= 0, \\ [3,0] M + [3,1] M' + [3,2] M'' + \{g - (3,0) - (3,1) - (3,2) - (3) - [3]\} M''' &= 0, \end{aligned} \right.$$

l'angle β restant tout à fait arbitraire.

Ces quatre équations ne contenant que les rapports des quantités M, M', M'', M''' , auront pour résultante l'équation du quatrième degré en g ,

$$\left| \begin{array}{cccc} g - (0,1) - (0,2) - (0,3) - (0) - [0] & [0,1] & [0,2] & [0,3] \\ [1,0] & g - (1,0) - (1,2) - (1,3) - (1) - [1] & [1,2] & [1,3] \\ [2,0] & [2,1] & g - (2,0) - (2,1) - (2,3) - (2) - [2] & [2,3] \\ [3,0] & [3,1] & [3,2] & g - (3,0) - (3,1) - (3,2) - (3) - [3] \end{array} \right| = 0.$$

Cette équation a toutes ses racines réelles et inégales, comme cela arrive pour

l'équation analogue que présente la théorie des inégalités séculaires des planètes : on peut en effet répéter sur cette équation les diverses démonstrations que l'on connaît de cette propriété, en observant que les coefficients sont liés entre eux par les relations

$$mna^2[0,1] = m'n'a'^2[1,0], \quad mna^2[0,2] = m''n''a''^2[2,0], \text{ etc.}$$

Soient g, g_1, g_2, g_3 les quatre racines. Portons dans les équations (6) la valeur de la première racine, nous obtiendrons trois équations distinctes déterminant les rapports de trois des quantités M, M', M'', M''' à la quatrième qui reste arbitraire. Si nous convenons, par exemple, de prendre M pour constante arbitraire, les autres coefficients M', M'', M''' seront déterminés en fonction de M , et on aura

$$M' = \lambda' M, \quad M'' = \lambda'' M, \quad M''' = \lambda''' M,$$

$\lambda', \lambda'', \lambda'''$ étant des nombres connus et dépendants du nombre g .

Une première solution des équations (5) nous sera donnée par les valeurs

$$\begin{aligned} h &= M \sin(gt + \beta), \quad h' = \lambda' M \sin(gt + \beta), \quad h'' = \lambda'' M \sin(gt + \beta), \quad h''' = \lambda''' M \sin(gt + \beta) \\ k &= M \cos(gt + \beta), \quad k' = \lambda' M \cos(gt + \beta), \quad \dots \dots \dots \end{aligned}$$

dans lesquelles il entre les deux arbitraires M et β .

Si nous portons de même la racine g_1 dans les équations (6), en désignant par M_1, M'_1, M''_1, M'''_1 les valeurs nouvelles des coefficients et prenant M_1 pour arbitraire, on aura, pour déterminer les autres, des formules telles que

$$M'_1 = \lambda'_1 M_1, \quad M''_1 = \lambda''_1 M_1, \quad M'''_1 = \lambda'''_1 M_1,$$

les nombres $\lambda'_1, \lambda''_1, \lambda'''_1$ étant connus et dépendants du nombre g_1 ; et il en résultera une seconde solution des équations (5) avec deux nouvelles arbitraires, M_1 et β_1 .

$$\begin{aligned} h &= M_1 \sin(g_1 t + \beta_1), \quad h' = \lambda'_1 M_1 \sin(g_1 t + \beta_1), \quad h'' = \lambda''_1 M_1 \sin(g_1 t + \beta_1), \quad h''' = \lambda'''_1 M_1 \sin(g_1 t + \beta_1) \\ k &= M_1 \cos(g_1 t + \beta_1), \quad k' = \lambda'_1 M_1 \cos(g_1 t + \beta_1), \quad \dots \dots \dots \end{aligned}$$

De même, chacune des racines g_2 et g_3 fournira une solution avec deux nouvelles constantes que nous désignerons par M_2, β_2 et M_3, β_3 .

En conséquence, on aura pour intégrale générale du système (5) l'ensemble des formules

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} h &= M \sin(gt + \beta) + M_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + M_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + M_3 \sin(g_3 t + \beta_3), \\ h' &= \lambda' M \sin(gt + \beta) + \lambda'_1 M_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + \lambda'_2 M_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + \lambda'_3 M_3 \sin(g_3 t + \beta_3), \\ h'' &= \lambda'' M \sin(gt + \beta) + \lambda''_1 M_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + \lambda''_2 M_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + \lambda''_3 M_3 \sin(g_3 t + \beta_3), \\ h''' &= \lambda''' M \sin(gt + \beta) + \lambda'''_1 M_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + \lambda'''_2 M_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + \lambda'''_3 M_3 \sin(g_3 t + \beta_3); \\ k &= M \cos(gt + \beta) + M_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + M_2 \cos(g_2 t + \beta_2) + M_3 \cos(g_3 t + \beta_3), \\ k' &= \lambda' M \cos(gt + \beta) + \lambda'_1 M_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + \lambda'_2 M_2 \cos(g_2 t + \beta_2) + \lambda'_3 M_3 \cos(g_3 t + \beta_3), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

30. Si dans les formules (7) on fait varier les quantités $M, M_1, M_2, M_3, \beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, ces mêmes formules pourront représenter l'intégrale générale du système des équations (1), (2), (3) et (4). Pour plus de commodité nous changerons les constantes des formules (7) en d'autres équivalentes qui rendront les calculs plus symétriques.

Posons

$$\begin{aligned} M \sin \beta &= C, & M_1 \sin \beta_1 &= C_1, & M_2 \sin \beta_2 &= C_2, & M_3 \sin \beta_3 &= C_3, \\ M \cos \beta &= D, & M_1 \cos \beta_1 &= D_1, & M_2 \cos \beta_2 &= D_2, & M_3 \cos \beta_3 &= D_3; \end{aligned}$$

les constantes C, D, C_1, D_1 , etc., sont celles dont nous chercherons les variations. Les formules (7) deviennent

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} h &= (C \cos gt + D \sin gt) + (C_1 \cos g_1 t + D_1 \sin g_1 t) \\ &\quad + (C_2 \cos g_2 t + D_2 \sin g_2 t) + (C_3 \cos g_3 t + D_3 \sin g_3 t), \\ h' &= \lambda' (C \cos gt + D \sin gt) + \lambda'_1 (C_1 \cos g_1 t + D_1 \sin g_1 t) + \dots, \\ h'' &= \lambda'' (C \cos gt + D \sin gt) + \lambda''_1 (C_1 \cos g_1 t + D_1 \sin g_1 t) + \dots, \\ h''' &= \lambda''' (C \cos gt + D \sin gt) + \lambda'''_1 (C_1 \cos g_1 t + D_1 \sin g_1 t) + \dots; \\ k &= (-C \sin gt + D \cos gt) + (-C_1 \sin g_1 t + D_1 \cos g_1 t) \\ &\quad + (-C_2 \sin g_2 t + D_2 \cos g_2 t) + (-C_3 \sin g_3 t + D_3 \cos g_3 t), \\ h' &= \lambda' (-C \sin gt + D \cos gt) + \lambda'_1 (-C_1 \sin g_1 t + D_1 \cos g_1 t) + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

Pour abréger mettons les équations (1), (2), (3), (4) sous la forme

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \{(0,1) + (0,2) + \dots\} k - [0,1] h' - [0,2] h'' - [0,3] h''' + H, \\ \frac{dh'}{dt} &= \{(1,0) + (1,2) + \dots\} k' - [1,0] k - [1,2] h'' - [1,3] h''' + H', \\ \frac{dh''}{dt} &= \{(2,0) + (2,1) + \dots\} k'' - [2,0] k - [2,1] h' - [2,3] h''' + H'', \\ \frac{dh'''}{dt} &= \{(3,0) + (3,1) + \dots\} k''' - [3,0] k - [3,1] h' - [3,2] h'' + H'''; \\ \frac{dk}{dt} &= -\{(0,1) + (0,2) + \dots\} h + [0,1] h' + [0,2] h'' + [0,3] h''' + K, \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

... (Il n'y aura pas confusion avec la constante K de V , celle-ci ne figurant plus explicitement.)

Portons dans les équations (9) les valeurs (8) en regardant comme variables les quantités C, D, C_1 , etc., et négligeons les termes qui se détruisent en vertu des équations (6) appliquées successivement à chacune des racines g, g_1, g_2, g_3 ; nous

obtiendrons entre les dérivées $\frac{dC}{dt}, \frac{dD}{dt}, \dots$, les équations

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dC}{dt} \cos gt + \frac{dD}{dt} \sin gt \right) + \left(\frac{dC_1}{dt} \cos g_1 t + \frac{dD_1}{dt} \sin g_1 t \right) + \dots = H, \\ \lambda' \left(\frac{dC}{dt} \cos gt + \frac{dD}{dt} \sin gt \right) + \lambda'_1 \left(\frac{dC_1}{dt} \cos g_1 t + \frac{dD_1}{dt} \sin g_1 t \right) + \dots = H', \\ \dots \dots \dots \\ \left(-\frac{dC}{dt} \sin gt + \frac{dD}{dt} \cos gt \right) + \left(-\frac{dC_1}{dt} \sin g_1 t + \frac{dD_1}{dt} \cos g_1 t \right) + \dots = K, \\ \lambda' \left(-\frac{dC}{dt} \sin gt + \frac{dD}{dt} \cos gt \right) + \lambda'_1 \left(-\frac{dC_1}{dt} \sin g_1 t + \frac{dD_1}{dt} \cos g_1 t \right) + \dots = K', \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Posons, pour un instant, afin d'abrégier l'écriture,

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{dC}{dt} \cos gt + \frac{dD}{dt} \sin gt, \quad x_1 = \frac{dC_1}{dt} \cos g_1 t + \frac{dD_1}{dt} \sin g_1 t, \dots, \\ y = -\frac{dC}{dt} \sin gt + \frac{dD}{dt} \cos gt, \quad y_1 = -\frac{dC_1}{dt} \sin g_1 t + \frac{dD_1}{dt} \cos g_1 t, \dots; \end{array} \right.$$

les équations (10) se partagent dans les deux groupes

$$\begin{aligned} x + x_1 + x_2 + x_3 &= H, & y + y_1 + y_2 + y_3 &= K, \\ \lambda' x + \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \lambda'_3 x_3 &= H', & \lambda' y + \lambda'_1 y_1 + \lambda'_2 y_2 + \lambda'_3 y_3 &= K', \\ \lambda'' x + \lambda''_1 x_1 + \lambda''_2 x_2 + \lambda''_3 x_3 &= H'', & \lambda'' y + \lambda''_1 y_1 + \lambda''_2 y_2 + \lambda''_3 y_3 &= K'', \\ \lambda''' x + \lambda'''_1 x_1 + \lambda'''_2 x_2 + \lambda'''_3 x_3 &= H''', & \lambda''' y + \lambda'''_1 y_1 + \lambda'''_2 y_2 + \lambda'''_3 y_3 &= K'''. \end{aligned}$$

Dans ces deux systèmes d'équations les coefficients des inconnues sont les mêmes : si donc on tire du premier les valeurs

$$\begin{aligned} x &= PH + P'H' + P''H'' + P'''H''', \\ x_1 &= P_1 H + P'_1 H' + P''_1 H'' + P'''_1 H''', \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

on tirera de même du second

$$\begin{aligned} y &= PK + P'K' + P''K'' + P'''K''', \\ y_1 &= P_1 K + P'_1 K' + P''_1 K'' + P'''_1 K''', \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

les nombres P, P', ... étant les mêmes. Mais des formules (11) on tire

$$\frac{dC}{dt} = x \cos gt - y \sin gt, \quad \frac{dD}{dt} = x \sin gt + y \cos gt, \dots;$$

on aura donc pour déterminer les valeurs variables des quantités $C, D, \dots$, les équations

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{dC}{dt} = P(H \cos gt - K \sin gt) + P'(H' \cos gt - K' \sin gt) + \dots, \\ \frac{dD}{dt} = P(H \sin gt + K \cos gt) + P'(H' \sin gt + K' \cos gt) + \dots, \\ \frac{dC_1}{dt} = P_1(H \cos g_1 t - K \sin g_1 t) + P'_1(H' \cos g_1 t - K' \sin g_1 t) + \dots, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Il ne reste qu'à appliquer ces formules, en y remplaçant $H, K, H', \dots$, par leurs valeurs.

Quant aux nombres $P, P', \dots$, nous pouvons les regarder comme connus par la résolution des équations entre x, x_1, x_2, x_3 . On peut du reste en avoir facilement l'expression au moyen des relations connues, de la forme

$$mna^2 MM_1 + m' n' a'^2 M' M'_1 + m'' n'' a''^2 M'' M''_1 + m''' n''' a'''^2 M''' M'''_1 = 0,$$

ou

$$mna^2 + m' n' a'^2 \lambda'_1 + m'' n'' a''^2 \lambda''_1 + m''' n''' a'''^2 \lambda'''_1 = 0.$$

Si l'on multiplie respectivement par $mna^2, m' n' a'^2 \lambda'_1, m'' n'' a''^2 \lambda''_1, m''' n''' a'''^2 \lambda'''_1$ les équations du premier groupe et qu'on les ajoute, il vient

$$(mna^2 + m' n' a'^2 \lambda'^2 + m'' n'' a''^2 \lambda''^2 + m''' n''' a'''^2 \lambda'''^2) x + (mna^2 + m' n' a'^2 \lambda'_1 + \dots) x_1 + \dots \\ = mna^2 H + m' n' a'^2 \lambda'_1 H' + m'' n'' a''^2 \lambda''_1 H'' + m''' n''' a'''^2 \lambda'''_1 H''',$$

équation qui se réduit à

$$x = \frac{mna^2 H + m' n' a'^2 \lambda'_1 H' + m'' n'' a''^2 \lambda''_1 H'' + m''' n''' a'''^2 \lambda'''_1 H'''}{mna^2 + m' n' a'^2 \lambda'^2 + m'' n'' a''^2 \lambda''^2 + m''' n''' a'''^2 \lambda'''^2}.$$

On aura donc

$$P = \frac{mna^2}{mna^2 + m' n' a'^2 \lambda'^2 + \dots}, \quad P' = \frac{m' n' a'^2 \lambda'_1}{mna^2 + m' n' a'^2 \lambda'^2 + \dots}, \dots$$

On trouverait pareillement les valeurs de $P_1, P'_1, \dots$, en multipliant les équations par $mna^2, m' n' a'^2 \lambda'_1, m'' n'' a''^2 \lambda''_1, m''' n''' a'''^2 \lambda'''_1$ et les ajoutant; et ainsi de suite.

31. Appliquons maintenant les formules (12). Les quantités désignées par $H, K, H', \dots$ sont respectivement, en observant qu'on peut remplacer $\cos(2l'' - l')$

et $\sin(2l' - l')$ par $-\cos(2l' - l)$ et $-\sin(2l' - l)$,

$$\begin{aligned} H &= \frac{m'an}{\mu} A \cos(2l' - l) + (0) \cos l + 5[0] (k \cos 2\ell + h \sin 2\ell), \\ K &= -\frac{m'an}{\mu} A \sin(2l' - l) - (0) \sin l - 5[0] (k \sin 2\ell - h \cos 2\ell), \\ H' &= \frac{a'n'}{\mu'} \left[m \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) - m'' A' \right] \cos(2l' - l) + (1) \cos l' + 5[1] (h' \cos 2\ell + h' \sin 2\ell), \\ K' &= -\frac{a'n'}{\mu'} \left[m \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) - m'' A' \right] \sin(2l' - l) - (1) \sin l' - 5[1] (h' \sin 2\ell - h' \cos 2\ell), \\ H'' &= -\frac{m'a''n''}{\mu''} \left(B' - \frac{a''}{2a'^2} \right) \cos(2l' - l) + (2) \cos l'' + 5[2] (h'' \cos 2\ell + h'' \sin 2\ell), \\ K'' &= +\frac{m'a''n''}{\mu''} \left(B' - \frac{a''}{2a'^2} \right) \sin(2l' - l) - (2) \sin l'' - 5[2] (h'' \sin 2\ell - h'' \cos 2\ell), \\ H''' &= (3) \cos l''' + 5[3] (h''' \cos 2\ell + h''' \sin 2\ell), \\ K''' &= -(3) \sin l''' - 5[3] (h''' \sin 2\ell - h''' \cos 2\ell). \end{aligned}$$

Il faut introduire dans ces quantités les valeurs de la première approximation. Pour opérer rigoureusement, il faudrait, dans $H, K, \dots$, remplacer $h, k, h', \dots$, par les valeurs (8), et cela dans toutes les quantités qui peuvent en dépendre, savoir, dans les grands axes, qui entrent dans tous les coefficients, et dans les longitudes moyennes; mais il est clair que chaque terme ne ferait ainsi que s'accroître de quantités négligeables. On peut donc se contenter de remplacer $h, k, h', \dots$, dans les termes où ils entrent explicitement, c'est-à-dire dans les termes dépendants de ℓ .

Observons d'ailleurs que les termes des valeurs de $H, K, \dots$, qui dépendent de l'angle ℓ sont beaucoup moins importants que les autres, d'abord parce qu'ils contiennent un facteur de l'ordre des excentricités, et ensuite parce que les coefficients $[0], [1], \dots$, sont assez petits. Si l'on prend les nombres de Laplace, on a (en secondes centésimales)

$$[0] = 103'', 27, \quad [1] = 207'', 29, \quad [2] = 417'', 63, \quad [3] = 974'', 19,$$

tandis que l'on a

$$(0) = 553878'', 76, \quad (1) = 109003'', 20, \quad (2) = 21264'', 89, \quad (3) = 2946'', 95.$$

Il serait donc permis, dans une première approximation, de négliger les termes en ℓ (Laplace ne les fait pas intervenir pour compléter ses équations) : c'est ce que nous ferons d'abord. Pour en tenir compte ensuite, il sera suffisamment exact, après y avoir introduit les valeurs de $h, k, h', \dots$, d'intégrer par quadratures en considérant les éléments comme constants dans les seconds membres des formules (12).

Quand on néglige les termes en $\mathfrak{L}$, l'intégration des équations (12) se ramène rigoureusement à de simples quadratures. Si l'on effectue les substitutions et qu'on intègre ensuite, on trouve que les constantes C, D, C₁, ..., doivent être remplacées respectivement par les expressions

$$\begin{aligned}
 (13) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 C + & \frac{P \frac{m' an}{\mu} A + P' \frac{a' n'}{\mu'} \left[m \left(B - \frac{a'}{2a'} \right) - m'' A' \right] - P'' \frac{m' a'' n''}{\mu''} \left(B' - \frac{a''}{2a'^2} \right)}{2n' - n - g} \sin(2l' - l - gt) \\
 & + P \frac{(0)}{n-g} \sin(l-gt) + P' \frac{(1)}{n'-g} \sin(l'-gt) + P'' \frac{(2)}{n''-g} \sin(l''-gt) + P''' \frac{(3)}{n'''-g} \sin(l'''-gt), \\
 D + & \frac{P \frac{m' an}{\mu} A + P' \frac{a' n'}{\mu'} \left[m \left(B - \frac{a'}{2a'} \right) - m'' A' \right] - P'' \frac{m' a'' n''}{\mu''} \left(B' - \frac{a''}{2a'^2} \right)}{2n' - n - g} \cos(2l' - l - gt) \\
 & + P \frac{(0)}{n-g} \cos(l-gt) + P' \frac{(1)}{n'-g} \cos(l'-gt) + P'' \frac{(2)}{n''-g} \cos(l''-gt) + P''' \frac{(3)}{n'''-g} \cos(l'''-gt), \\
 C_1 + & \frac{P_1 \frac{m' an}{\mu} A + P'_1 \frac{a' n'}{\mu'_1} \left[m \left(B - \frac{a'}{2a'} \right) - m'' A' \right] + P''_1 \frac{m' a'' n''}{\mu''} \left(B' - \frac{a''}{2a'^2} \right)}{2n'_1 - n - g_1} \sin(2l' - l - g_1 t) \\
 & + P_1 \frac{(0)}{n-g_1} \sin(l-g_1 t) + P'_1 \frac{(1)}{n'_1-g_1} \sin(l'-g_1 t) + P''_1 \frac{(2)}{n''-g_1} \sin(l''-g_1 t) + P'''_1 \frac{(3)}{n'''-g_1} \sin(l'''-g_1 t),
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

et ainsi de suite. La valeur de C₁ se déduit de celle de C en remplaçant seulement P, P', P'', P''' et g par P₁, P'₁, P''₁, P'''₁ et g₁ : on déduirait de même D₁ de D, etc.

Ces valeurs doivent être substituées dans les formules (8). Pour abrégé, désignons par E le coefficient commun de $\sin(2l' - l - gt)$ et de $\cos(2l' - l - gt)$ dans C et D, par E₁ le coefficient commun de $\sin(2l' - l - g_1 t)$ et de $\cos(2l' - l - g_1 t)$ dans C₁ et D₁, etc., et de même par F celui de $\sin(l - gt)$ dans C, par F' celui de $\sin(l' - gt)$, etc., par F₁ celui de $\sin(l - g_1 t)$ dans C₁, etc. On trouvera ainsi qu'en faisant abstraction des termes en $\mathfrak{L}$, les intégrales des équations (9) seront représentées par les formules (8) ou les formules (7), les valeurs h, h', ..., k, k', ..., étant accrues des quantités respectives

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 \partial h = & (E + E_1 + E_2 + E_3) \sin(2l' - l) + (F + F_1 + F_2 + F_3) \sin l \\
 & + (F' + F'_1 + F'_2 + F'_3) \sin l' + (F'' + F''_1 + F''_2 + F''_3) \sin l'' + (F''' + F'''_1 + F'''_2 + F'''_3) \sin l''', \\
 \partial h' = & (E\lambda' + E_1\lambda'_1 + E_2\lambda'_2 + E_3\lambda'_3) \sin(2l' - l) + (F\lambda' + F_1\lambda'_1 + F_2\lambda'_2 + F_3\lambda'_3) \sin l + \dots, \\
 \partial h'' = & (E\lambda'' + E_1\lambda''_1 + E_2\lambda''_2 + E_3\lambda''_3) \sin(2l' - l) + (F\lambda'' + F_1\lambda''_1 + F_2\lambda''_2 + F_3\lambda''_3) \sin l + \dots, \\
 \partial h''' = & (E\lambda''' + E_1\lambda'''_1 + E_2\lambda'''_2 + E_3\lambda'''_3) \sin(2l' - l) + (F\lambda''' + F_1\lambda'''_1 + F_2\lambda'''_2 + F_3\lambda'''_3) \sin l + \dots; \\
 \partial h = & (E + E_1 + E_2 + E_3) \cos(2l' - l) + (F + F_1 + F_2 + F_3) \cos l + \dots, \\
 \partial h' = & (E\lambda' + E_1\lambda'_1 + E_2\lambda'_2 + E_3\lambda'_3) \cos(2l' - l) + (F\lambda' + F_1\lambda'_1 + F_2\lambda'_2 + F_3\lambda'_3) \cos l + \dots, \\
 \partial h'' = & (E\lambda'' + E_1\lambda''_1 + E_2\lambda''_2 + E_3\lambda''_3) \cos(2l' - l) + (F\lambda'' + F_1\lambda''_1 + F_2\lambda''_2 + F_3\lambda''_3) \cos l + \dots, \\
 \partial h''' = & (E\lambda''' + E_1\lambda'''_1 + E_2\lambda'''_2 + E_3\lambda'''_3) \cos(2l' - l) + (F\lambda''' + F_1\lambda'''_1 + F_2\lambda'''_2 + F_3\lambda'''_3) \cos l + \dots;
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Le calcul des termes dépendants de $\mathcal{L}$ se fera de la même manière.
Si l'on pose, pour simplifier les formules,

$$Q = 5 \{ P[0] + P'\lambda'[1] + P''\lambda''[2] + P'''\lambda'''[3] \} \frac{1}{2\mathcal{H} - 2g},$$

$$Q_1 = 5 \{ P[0] + P'\lambda'_1[1] + P''\lambda''_1[2] + P'''\lambda'''_1[3] \} \frac{1}{2\mathcal{H} - g - g_1},$$

$$Q_2 = 5 \{ P[0] + P'\lambda'_2[1] + P''\lambda''_2[2] + P'''\lambda'''_2[3] \} \frac{1}{2\mathcal{H} - g - g_2},$$

$$Q_3 = 5 \{ P[0] + P'\lambda'_3[1] + P''\lambda''_3[2] + P'''\lambda'''_3[3] \} \frac{1}{2\mathcal{H} - g - g_3},$$

$$Q' = 5 \{ P_1[0] + P'_1\lambda'_1[1] + P''_1\lambda''_1[2] + P'''_1\lambda'''_1[3] \} \frac{1}{2\mathcal{H} - g_1 - g},$$

$$Q'_1 = 5 \{ P_1[0] + P'_1\lambda'_1[1] + P''_1\lambda''_1[2] + P'''_1\lambda'''_1[3] \} \frac{1}{2\mathcal{H} - 2g_1},$$

et ainsi de suite, l'indice de Q étant le même que celui des quantités λ , et l'accent de Q le même que l'indice des quantités P , on trouvera que les valeurs de h , k , h' , ... données par les formules (7) ou (8) devront être augmentées encore des quantités respectives

$$\begin{aligned} \delta_1 h = & (Q + Q' + Q'' + Q''') [-C \cos(2\mathcal{L} - gt) + D \sin(2\mathcal{L} - gt)] \\ & + (Q_1 + Q'_1 + Q''_1 + Q'''_1) [-C_1 \cos(2\mathcal{L} - g_1 t) + D_1 \sin(2\mathcal{L} - g_1 t)] \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_1 h = & (Q + Q' + Q'' + Q''') [C \sin(2\mathcal{L} - gt) + D \cos(2\mathcal{L} - gt)] \\ & + (Q_1 + Q'_1 + Q''_1 + Q'''_1) [C_1 \sin(2\mathcal{L} - g_1 t) + D_1 \cos(2\mathcal{L} - g_1 t)] \\ & + \dots \end{aligned}$$

les constantes C et D étant les mêmes que dans les formules (8).

Ou bien, si l'on veut revenir aux constantes M , β , M_1 , ... des formules (7), on aura les nouvelles formules

$$\begin{aligned} \delta_1 h = & (Q + Q' + Q'' + Q''') M \sin(2\mathcal{L} - gt - \beta) + (Q_1 + Q'_1 + Q''_1 + Q'''_1) M_1 \sin(2\mathcal{L} - g_1 t - \beta_1) \\ & + (Q_2 + Q'_2 + Q''_2 + Q'''_2) M_2 \sin(2\mathcal{L} - g_2 t - \beta_2) + (Q_3 + Q'_3 + Q''_3 + Q'''_3) M_3 \sin(2\mathcal{L} - g_3 t - \beta_3) + \dots, \\ \delta_1 h' = & (Q + Q' + Q'' + Q''') \lambda' M \sin(2\mathcal{L} - gt - \beta) + (Q_1 + Q'_1 + Q''_1 + Q'''_1) \lambda'_1 M_1 \sin(2\mathcal{L} - g_1 t - \beta_1) + \dots, \\ \delta_1 h'' = & (Q + Q' + Q'' + Q''') \lambda'' M \sin(2\mathcal{L} - gt - \beta) + (Q_1 + Q'_1 + Q''_1 + Q'''_1) \lambda''_1 M_1 \sin(2\mathcal{L} - g_1 t - \beta_1) + \dots, \\ \delta_1 h''' = & (Q + Q' + Q'' + Q''') \lambda''' M \sin(2\mathcal{L} - gt - \beta) + (Q_1 + Q'_1 + Q''_1 + Q'''_1) \lambda'''_1 M_1 \sin(2\mathcal{L} - g_1 t - \beta_1) + \dots, \\ \delta_1 k = & (Q + Q' + Q'' + Q''') M \cos(2\mathcal{L} - gt - \beta) + (Q_1 + Q'_1 + Q''_1 + Q'''_1) M_1 \cos(2\mathcal{L} - g_1 t - \beta_1) \\ & + (Q_2 + Q'_2 + Q''_2 + Q'''_2) M_2 \cos(2\mathcal{L} - g_2 t - \beta_2) + (Q_3 + Q'_3 + Q''_3 + Q'''_3) M_3 \cos(2\mathcal{L} - g_3 t - \beta_3) + \dots, \\ \delta_1 k' = & (Q + Q' + Q'' + Q''') \lambda' M \cos(2\mathcal{L} - gt - \beta) + (Q_1 + Q'_1 + Q''_1 + Q'''_1) \lambda'_1 M_1 \cos(2\mathcal{L} - g_1 t - \beta_1) + \dots, \\ & \dots \end{aligned}$$

Les formules (15), jointes aux formules (7) et (14), donneront les valeurs complètes des quantités $h, k, h', \dots$. En les substituant dans les expressions

$$-a(k \cos l + h \sin l), \quad 2(k \sin l - h \cos l),$$

on obtiendra les termes des rayons vecteurs et des longitudes qui dépendent des variations séculaires des éléments. Les valeurs (7) donneront pour le premier satellite

$$\begin{aligned} \partial r &= -aM \cos(l - gt - \beta) - aM_1 \cos(l - g_1 t - \beta_1) - \dots, \\ \partial v &= 2M \sin(l - gt - \beta) + 2M_1 \sin(l - g_1 t - \beta_1) + \dots, \end{aligned}$$

et des formules analogues pour les trois autres. Ces inégalités sont celles qu'on trouve dans Laplace (liv. VIII, n° 6); mais il y aura peut-être lieu à tenir compte aussi des formules (14) et (15).

32. Lorsqu'on fait abstraction des termes donnés par les formules (15), la détermination des constantes $M, M_1, \dots, \beta, \beta_1, \dots$ peut se faire par le moyen connu; elle est moins simple lorsqu'on y a égard, mais il n'y a d'autre difficulté que la longueur des calculs.

Si l'on ne voulait pas tenir compte des termes en $\mathcal{L}$ qui entrent dans les équations différentielles, il ne serait pas nécessaire de recourir à la variation des constantes pour en obtenir les intégrales complètes. Il suffirait pour cela de poser

$$\begin{aligned} h &= P \sin(2l' - l) + Q \sin l + R \sin l' + S \sin l'' + T \sin l''' + M \sin(gt + \beta), \\ h' &= P' \sin(2l' - l) + Q' \sin l + R' \sin l' + S' \sin l'' + T' \sin l''' + M' \sin(gt + \beta), \\ &\dots\dots\dots, \\ k &= P \cos(2l' - l) + Q \cos l + R \cos l' + S \cos l'' + T \cos l''' + M \cos(gt + \beta), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans les équations (1), (2), (3), (4) privées de leurs termes en $\mathcal{L}$, et égalant à zéro les coefficients des mêmes sinus ou cosinus, il viendrait les systèmes d'équations suivants entre les divers coefficients :

$$\begin{aligned} (P) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \{2n' - n - (0,1) - (0,2) - (0,3) - (0) - [0]\} P + [0,1] P' + [0,2] P'' + [0,3] P''' = \frac{m' an}{\mu} A, \\ & [1,0] P + \{2n' - n - (1,0) - (1,2) - (1,3) - (1) - [1]\} P' + [1,2] P'' + [1,3] P''' \\ & \quad = \frac{a' n'}{\mu'} \left[m \left(B - \frac{a'}{2a^2} \right) - m'' A' \right], \\ & [2,0] P + [2,1] P' + \{2n' - n - (2,0) - \dots - (2) - [2]\} P'' + [2,3] P''' = -\frac{m' a'' n''}{\mu''} \left(B' - \frac{a''}{2a'^2} \right), \\ & [3,0] P + [3,1] P' + [3,2] P'' + \{2n' - n - (3,0) - (3,1) - (3,2) - (3) - [3]\} P''' = 0; \end{aligned} \right. \\ (Q) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \{n - (0,1) - (0,2) - (0,3) - (0) - [0]\} Q + [0,1] Q' + [0,2] Q'' + [0,3] Q''' = (0), \\ & [1,0] Q + \{n - (1,0) - (1,2) - (1,3) - (1) - [1]\} Q' + [1,2] Q'' + [1,3] Q''' = 0, \\ & [2,0] Q + [2,1] Q' + \{n - (2,0) - (2,1) - (2,3) - (2) - [2]\} Q'' + [2,3] Q''' = 0, \\ & [3,0] Q + [3,1] Q' + [3,2] Q'' + \{n - (3,0) - (3,1) - (3,2) - (3) - [3]\} Q''' = 0. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Viennent ensuite trois groupes pareils à (Q), et qui s'en déduisent en y rempla-

çant n , Q successivement par n' , R , par n'' , S , par n''' , T pour les premiers membres : quant aux seconds membres, ils sont nuls, excepté pour la seconde équation du premier groupe où l'on aura (1), pour la troisième équation du second groupe où l'on aura (2), et pour la quatrième équation du dernier groupe où l'on aura (3).

Enfin, entre les coefficients M , M' ,... on aura les équations (6) du n° 29, d'où l'on déduira encore les termes contenus dans les formules (7).

Les cinq autres systèmes d'équations détermineront en fonction de quantités toutes connues, et sans laisser d'arbitraires, les coefficients P , Q , R , S , T , P' ,.... Les premiers membres de ces équations étant les mêmes dans tous les systèmes, sauf l'échange des quantités $2n' - n$, n , n' , n'' , n''' , il en résultera des simplifications pour le calcul des coefficients.

Si l'on pose généralement

$$(z) = \begin{vmatrix} z - (0,1) - \dots - (0) - [0] & [0,1] & [0,2] & [0,3] \\ [1,0] & z - (1,0) - \dots - (1) - [1] & [1,2] & [1,3] \\ [2,0] & [2,1] & z - (2,0) - \dots - (2) - [2] & [2,3] \\ [3,0] & [3,1] & [3,2] & z - (3,0) - \dots - (3) - [3] \end{vmatrix},$$

l'équation qui détermine g , g_1 , g_2 , g_3 sera $f(z) = 0$; les valeurs de P , P' , P'' , P''' auront pour dénominateur commun $f(2n' - n)$, celles de Q , Q' , Q'' , Q''' auront $f(n)$ et ainsi de suite. On voit donc qu'à part le cas très-peu probable où l'une des racines g , g_1 , g_2 , g_3 serait égale à l'un des nombres $2n' - n$, n , n' , n'' , n''' , les coefficients P , P' ,..., Q , Q' ,..., R , R' ,... s'obtiendront sans impossibilité ni indétermination.

CHAPITRE V.

INÉGALITÉS SÉCULAIRES ET A LONGUES PÉRIODES DES INCLINAISONS ET DES LONGITUDES DES NOEUDS.

33. Les formules générales qui expriment les variations des éléments ϖ et θ peuvent, comme dans la recherche des inégalités périodiques, se réduire aux suivantes :

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{1}{\varphi} \frac{d\Omega}{d\theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{1}{\varphi} \frac{d\Omega}{d\varphi}.$$

Par suite, les termes utiles des diverses fonctions perturbatrices, en se bornant

au second ordre par rapport aux inclinaisons, seront donnés par les expressions suivantes :

Premier satellite.

$$\begin{aligned}
 R_{(0,1)} &= -\frac{1}{8} B^{(1)} [\varphi^2 - 2\varphi\varphi' \cos(\theta - \theta')] \\
 &\quad + \frac{1}{8} B^{(2)} [\varphi^2 \cos(4l' - 2l - 2\theta) - 2\varphi\varphi' \cos(4l' - 2l - \theta - \theta')], \\
 R_{(0,2)} &= -\frac{1}{8} \dot{B}^{(1)} [\varphi^2 - 2\varphi\varphi'' \cos(\theta - \theta'')], \\
 R_{(0,3)} &= -\frac{1}{8} \ddot{B}^{(1)} [\varphi^2 - 2\varphi\varphi''' \cos(\theta - \theta''')], \\
 R_{(0,4)} &= -\frac{3}{8} \frac{a^2}{\mathfrak{A}^3} [\varphi^2 - 2\varphi\Phi \cos(\theta - \Theta)] + \frac{3}{8} \frac{a^2}{\mathfrak{A}^3} [\varphi^2 \cos(2\mathfrak{L} - 2\theta) - 2\varphi\Phi \cos(2\mathfrak{L} - \theta - \Theta)], \\
 V &= -\frac{1}{2} \frac{K}{a^2} [\varphi^2 + 2\varphi\omega \cos(\psi + \theta)] + \frac{K}{2a^2} [\varphi^2 \cos(2l - 2\theta) + 2\varphi\omega \cos(2l + \psi - \theta)].
 \end{aligned}$$

Second satellite.

$$\begin{aligned}
 R_{(1,0)} &= -\frac{1}{8} B^{(1)} [\varphi'^2 - 2\varphi\varphi' \cos(\theta - \theta')] \\
 &\quad + \frac{1}{8} B^{(2)} [\varphi'^2 \cos(4l' - 2l - 2\theta') - 2\varphi\varphi' \cos(4l' - 2l - \theta - \theta')], \\
 R_{(1,2)} &= -\frac{1}{8} B'^{(1)} [\varphi'^2 - 2\varphi'\varphi'' \cos(\theta' - \theta'')] \\
 &\quad + \frac{1}{8} B'^{(2)} [\varphi'^2 \cos(4l'' - 2l' - 2\theta') - 2\varphi'\varphi'' \cos(4l'' - 2l' - \theta' - \theta'')], \\
 R_{(1,3)} &= -\frac{1}{8} \dot{B}'^{(1)} [\varphi'^2 - 2\varphi'\varphi''' \cos(\theta' - \theta''')], \\
 R_{(1,4)} \text{ et } V' &\text{ se déduisent de } R_{(0,4)} \text{ et } V \text{ en remplaçant les éléments du premier satellite par} \\
 &\text{ceux du second.}
 \end{aligned}$$

Troisième satellite.

$$\begin{aligned}
 R_{(2,0)} &= -\frac{1}{8} \dot{B}^{(1)} [\varphi''^2 - 2\varphi\varphi'' \cos(\theta - \theta'')], \\
 R_{(2,1)} &= -\frac{1}{8} B'^{(1)} [\varphi''^2 - 2\varphi'\varphi'' \cos(\theta' - \theta'')] \\
 &\quad + \frac{1}{8} B'^{(2)} [\varphi''^2 \cos(4l'' - 2l' - 2\theta'') - 2\varphi'\varphi'' \cos(4l'' - 2l' - \theta' - \theta'')], \\
 R_{(2,2)} &= -\frac{1}{8} B''^{(1)} [\varphi''^2 - 2\varphi''\varphi''' \cos(\theta'' - \theta''')], \\
 R_{(2,3)} \text{ et } V'' &\text{ se déduisent de } R_{(0,3)} \text{ et } V \text{ par de simples additions d'accents.}
 \end{aligned}$$

Quatrième satellite.

$$R_{(1,1)} = -\frac{1}{8} \ddot{B}^{(1)} [\varphi''' - 2\varphi\varphi''' \cos(\theta - \theta'')],$$

$$R_{(2,1)} = -\frac{1}{8} \dot{B}'^{(1)} [\varphi''' - 2\varphi'\varphi''' \cos(\theta' - \theta'')],$$

$$R_{(3,1)} = -\frac{1}{8} B''^{(1)} [\varphi''' - 2\varphi''\varphi''' \cos(\theta'' - \theta''')],$$

$R_{(3,1)}$ et V'' se déduisent de $R_{(1,1)}$ et V par des additions d'accents.

En effectuant les calculs on trouve pour le premier satellite les deux équations

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= (0,1)\varphi' \sin(\theta - \theta') + (0,2)\varphi'' \sin(\theta - \theta'') + (0,3)\varphi''' \sin(\theta - \theta''') \\ &\quad + [0]\Phi \sin(\theta - \Theta) - (0)\omega \sin(\psi + \theta) \\ &\quad - \frac{m'an}{\mu} \frac{B^{(3)}}{4} [\varphi \sin(4l' - 2l - 2\theta) - \varphi' \sin(4l' - 2l - \theta - \theta')] \\ &\quad - [0][\varphi \sin(2\varrho - 2\theta) - \Phi \sin(2\varrho - \theta - \Theta)] \\ &\quad - (0)[\varphi \sin(2l - 2\theta) + \omega \sin(2l + \psi - \theta)], \\ \varphi \frac{d\theta}{dt} &= -\{(0,1) + (0,2) + (0,3) + (0) + [0]\}\varphi \\ &\quad + (0,1)\varphi' \cos(\theta - \theta') + (0,2)\varphi'' \cos(\theta - \theta'') + (0,3)\varphi''' \cos(\theta - \theta''') \\ &\quad + [0]\Phi \cos(\theta - \Theta) - (0)\omega \cos(\psi + \theta) \\ &\quad + \frac{m'an}{\mu} \frac{B^{(3)}}{4} [\varphi \cos(4l' - 2l - 2\theta) - \varphi' \cos(4l' - 2l - \theta - \theta')] \\ &\quad + [0][\varphi \cos(2\varrho - 2\theta) - \Phi \cos(2\varrho - \theta - \Theta)] \\ &\quad + (0)[\varphi \cos(2l - 2\theta) + \omega \cos(2l + \psi - \theta)], \end{aligned}$$

les coefficients $(0,1)$, $(0,2)$, ..., (0) , ..., $[0]$, ... ayant la même valeur que dans le chapitre IV.

Remplaçons les variables φ , θ , φ' , ... par les variables p , q , p' , ... liées aux premières par les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \varphi \sin \theta, \quad p' = \varphi' \sin \theta', \dots, \\ q = \varphi \cos \theta, \quad q' = \varphi' \cos \theta', \dots, \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta + \varphi \frac{d\theta}{dt} \cos \theta, \dots, \\ \frac{dq}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta - \varphi \frac{d\theta}{dt} \sin \theta, \dots \end{array} \right.$$

Posons également

$$\Phi \sin \Theta = \mathcal{P}, \quad \Phi \cos \Theta = \mathcal{Q}, \quad \omega \sin \psi = p'', \quad -\omega \cos \psi = q''.$$

Au moyen des valeurs de $\frac{d\omega}{dt}$ et de $\varphi \frac{d\theta}{dt}$ on formera aisément les valeurs de $\frac{dp}{dt}$ et

$\frac{dq}{dt}$, et de même au moyen des valeurs qu'on trouvera pour $\frac{d\varphi'}{dt}$ et $\varphi' \frac{d\theta'}{dt}$ on formera $\frac{dp'}{dt}$ et $\frac{dq'}{dt}$, et ainsi de suite.

Si l'on pose encore

$$\begin{aligned} \boxed{0,1} &= \frac{m' a n}{\mu} \frac{B^{(3)}}{4}, & \boxed{1,0} &= \frac{m a' n'}{\mu'} \frac{B^{(1)}}{4}, \\ \boxed{1,2} &= \frac{m'' a' n'}{\mu'} \frac{B^{(2)}}{4}, & \boxed{2,1} &= \frac{m' a'' n''}{\mu''} \frac{B^{(1)}}{4}, \end{aligned}$$

on obtiendra entre les variables $p, q, p', \dots$ les huit équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} = & - \{ (0,1) + (0,2) + (0,3) + (0) + [0] \} q + (0,1) q' + (0,2) q'' + (0,3) q''' + (0) q^{iv} + [0] \mathfrak{Q} \\ & + [0] [(q - \mathfrak{Q}) \cos 2\mathfrak{L} + (p - \mathfrak{P}) \sin 2\mathfrak{L}] + \boxed{0,1} [(q - q') \cos(4l' - 2l) + (p - p') \sin(4l' - 2l) \\ & + (0) [(q - q^{iv}) \cos 2l + (p - p^{iv}) \sin 2l], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp'}{dt} = & - \{ (1,0) + (1,2) + (1,3) + (1) + [1] \} q' + (1,0) q + (1,2) q'' + (1,3) q''' + (1) q^{iv} + [1] \mathfrak{Q} \\ & + [1] [(q' - \mathfrak{Q}) \cos 2\mathfrak{L} + (p' - \mathfrak{P}) \sin 2\mathfrak{L}] + \boxed{1,0} [(q' - q) \cos(4l' - 2l) + (p' - p) \sin(4l' - 2l) \\ & + \boxed{1,2} [(q' - q'') \cos(4l'' - 2l') + (p' - p'') \sin(4l'' - 2l')] + (1) [(q' - q^{iv}) \cos 2l' + (p' - p^{iv}) \sin 2l'], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp''}{dt} = & - \{ (2,0) + (2,1) + (2,3) + (2) + [2] \} q'' + (2,0) q + (2,1) q' + (2,3) q''' + (2) q^{iv} + [2] \mathfrak{Q} \\ & + [2] [(q'' - \mathfrak{Q}) \cos 2\mathfrak{L} + (p'' - \mathfrak{P}) \sin 2\mathfrak{L}] + \boxed{2,1} [(q'' - q') \cos(4l'' - 2l') + (p'' - p') \sin(4l'' - 2l') \\ & + (2) [(q'' - q^{iv}) \cos 2l'' + (p'' - p^{iv}) \sin 2l''], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp'''}{dt} = & - \{ (3,0) + (3,1) + (3,2) + (3) + [3] \} q''' + (3,0) q + (3,1) q' + (3,2) q'' + (3) q^{iv} + [3] \mathfrak{Q} \\ & + [3] [(q''' - \mathfrak{Q}) \cos 2\mathfrak{L} + (p''' - \mathfrak{P}) \sin 2\mathfrak{L}] + (3) [(q''' - q^{iv}) \cos 2l''' + (p''' - p^{iv}) \sin 2l'''], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} = & \{ (0,1) + (0,2) + (0,3) + (0) + [0] \} p - (0,1) p' - (0,2) p'' - (0,3) p''' - (0) p^{iv} - [0] \mathfrak{P} \\ & - [0] [(q - \mathfrak{Q}) \sin 2\mathfrak{L} - (p - \mathfrak{P}) \cos 2\mathfrak{L}] - \boxed{0,1} [(q - q') \sin(4l' - 2l) - (p - p') \cos(4l' - 2l) \\ & - (0) [(q - q^{iv}) \sin 2l - (p - p^{iv}) \cos 2l], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dq'}{dt} = & \{ (1,0) + (1,2) + (1,3) + (1) + [1] \} p' - (1,0) p - (1,2) p'' - (1,3) p''' - (1) p^{iv} - [1] \mathfrak{P} \\ & - [1] [(q' - \mathfrak{Q}) \sin 2\mathfrak{L} - (p' - \mathfrak{P}) \cos 2\mathfrak{L}] - \boxed{1,0} [(q' - q) \sin(4l' - 2l) - (p' - p) \cos(4l' - 2l) \\ & - \boxed{1,2} [(q' - q'') \sin(4l'' - 2l') - (p' - p'') \cos(4l'' - 2l')] - (1) [(q' - q^{iv}) \sin 2l' - (p' - p^{iv}) \cos 2l'], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dq''}{dt} = & \{ (2,0) + (2,1) + (2,3) + (2) + [2] \} p'' - (2,0) p - (2,1) p' - (2,3) p''' - (2) p^{iv} - [2] \mathfrak{P} \\ & - [2] [(q'' - \mathfrak{Q}) \sin 2\mathfrak{L} - (p'' - \mathfrak{P}) \cos 2\mathfrak{L}] - \boxed{2,1} [(q'' - q') \sin(4l'' - 2l') - (p'' - p') \cos(4l'' - 2l') \\ & - (2) [(q'' - q^{iv}) \sin 2l'' - (p'' - p^{iv}) \cos 2l''], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dq'''}{dt} = & \{ (3,0) + (3,1) + (3,2) + (3) + [3] \} p''' - (3,0) p - (3,1) p' - (3,2) p'' - (3) p^{iv} - [3] \mathfrak{P} \\ & - [3] [(q''' - \mathfrak{Q}) \sin 2\mathfrak{L} - (p''' - \mathfrak{P}) \cos 2\mathfrak{L}] - (3) [(q''' - q^{iv}) \sin 2l''' - (p''' - p^{iv}) \cos 2l''']. \end{aligned}$$

Dans ces huit équations différentielles il entre douze variables, savoir : $p, p', p'', p''', p^{iv}, \mathfrak{P}, q, q', q'', q''', q^{iv}, \mathfrak{Q}$; mais les quantités $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ peuvent être regardées comme connues par la théorie de Jupiter, et elles ne dépendent pas sensiblement de l'attraction des satellites. Le nombre des inconnues se trouve ainsi réduit à 10, et nous allons obtenir entre ces inconnues deux nouvelles équations, savoir les équations qui régissent la précession des équinoxes de Jupiter et la nutation de son équateur par rapport au plan fixe.

34. Désignons toujours par ω l'inclinaison de l'équateur de Jupiter sur le plan fixe, et par $-\psi$ la longitude de son nœud descendant; désignons en outre par i la vitesse de rotation, par A, B, C les trois moments d'inertie principaux relatifs au centre de gravité, C étant celui qui se rapporte à l'axe de rotation, et par U une fonction perturbatrice dont nous donnerons plus bas l'expression. Les équations que nous cherchons seront données par les formules de Poisson

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{iC \sin \omega} \frac{dU}{d\psi}, \quad \frac{d\psi}{dt} = - \frac{1}{iC \sin \omega} \frac{dU}{d\omega}.$$

Ces formules ont été établies par Poisson de deux manières différentes dans deux Mémoires sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité (*Journal de l'École Polytechnique*, XV^e Cahier; *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VII); elles ont été démontrées de nouveau par M. Serret dans son Mémoire relatif à la même question (*Annales de l'Observatoire impérial de Paris*, t. V).

Ces équations ne sont qu'approchées, mais on y néglige seulement des termes à très-courte période (comme la durée de la rotation de Jupiter ou ses parties aliquotes), ainsi que des quantités qui sont de l'ordre du carré des forces perturbatrices. Les forces perturbatrices du mouvement de rotation de Jupiter sont les attractions des satellites et du Soleil, et U désigne la fonction de ces forces.

Soient m la masse de l'un des astres perturbateurs; ξ, η, ζ ses coordonnées par rapport à trois axes rectangulaires fixes O ξ , O η , O ζ menés par le centre de gravité de Jupiter et dont les deux premiers O ξ , O η soient situés dans le plan fixe, O ξ étant dirigé vers le point d'où se comptent les longitudes; ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées du même astre m par rapport aux axes principaux d'inertie de Jupiter.

La partie de U qui provient de l'astre m pourra (SERRET, p. 257-259 et p. 303) être mise sous la forme

$$U = - \frac{3fm}{4a^3} (2C - A - B) \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(\frac{\xi_1}{r}\right)^2,$$

r étant, comme toujours, le rayon vecteur de m , et a sa distance moyenne.

Nous allons développer la valeur de U en y introduisant les éléments elliptiques

de m . On a, par les formules de la transformation des coordonnées,

$$\zeta_1 = (\xi \sin \psi + \eta \cos \psi) \sin \omega + \zeta \cos \omega.$$

Mais si ν_1 et λ sont la longitude et la latitude jovicentriques de m , on a

$$\xi = r \cos \lambda \cos \nu_1, \quad \eta = r \cos \lambda \sin \nu_1, \quad \zeta = r \sin \lambda,$$

d'où

$$\frac{\zeta_1}{r} = \cos \lambda \sin(\nu_1 + \psi) \sin \omega + \sin \lambda \cos \omega.$$

D'autre part, en désignant par ν , φ , θ la longitude vraie, l'inclinaison et la longitude du nœud pour l'astre m , on a les formules

$$\begin{aligned} \cos \lambda \cos(\nu_1 - \theta) &= \cos(\nu - \theta), & \cos \lambda \sin(\nu_1 - \theta) &= \sin(\nu - \theta) \cos \varphi, \\ \sin \lambda &= \sin(\nu - \theta) \sin \varphi; \end{aligned}$$

si l'on ajoute les deux premières, multipliées respectivement par $\sin(\theta + \psi)$ et $\cos(\theta + \psi)$, il vient

$$\begin{aligned} \cos \lambda \sin(\nu_1 + \psi) &= \cos(\nu - \theta) \sin(\theta + \psi) + \sin(\nu - \theta) \cos(\theta + \psi) \cos \varphi \\ &= \sin(\nu + \psi) - 2 \sin(\nu - \theta) \cos(\theta + \psi) \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

On aura donc, en substituant,

$$\frac{\zeta_1}{r} = \sin(\nu + \psi) \sin \omega + \sin(\nu - \theta) \sin \varphi \cos \omega - 2 \sin(\nu - \theta) \cos(\theta + \psi) \sin \omega \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Observons que l'angle ω est du même ordre de grandeur que l'angle φ ; en nous bornant aux termes qui dépendent des carrés ou du produit de ces quantités, nous obtiendrons

$$\left(\frac{\zeta_1}{r}\right)^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \omega [1 - \cos(2\nu + 2\psi)] + \frac{1}{2} \sin \varphi \sin 2\omega [\cos(\psi + \theta) - \cos(2\nu + \psi - \theta)],$$

formule dans laquelle nous avons supprimé le terme $\sin^2(\nu - \theta) \sin^2 \varphi$, qui ne contient ni ψ ni ω . Dans cette formule nous remplacerons la longitude vraie ν par la longitude moyenne l , car tous les termes étant déjà du second ordre par rapport aux inclinaisons, on peut y négliger les excentricités : il viendra en conséquence

$$\left(\frac{\zeta_1}{r}\right)^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \omega [1 - \cos(2l + 2\psi)] + \frac{1}{2} \sin \varphi \sin 2\omega [\cos(\psi + \theta) - \cos(2l + \psi - \theta)].$$

si dans ces formules on remplace $\frac{d\omega}{dt}$ et $\omega \frac{d\psi}{dt}$ par les valeurs précédentes, et si l'on pose, pour abréger,

$$\textcircled{0} = \frac{3f(2C-A-B)}{4iC} \frac{m}{a^3}, \quad \textcircled{1} = \frac{3f(2C-A-B)}{4iC} \frac{m'}{a'^3}, \dots, \quad \textcircled{s} = \frac{3f(2C-A-B)}{4iC} \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{A}^3},$$

on obtiendra les deux équations

$$(2) \begin{cases} \frac{dp^{iv}}{dt} = -(\textcircled{0} + \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{s}) q^{iv} + \textcircled{0} q + \textcircled{1} q' + \textcircled{2} q'' + \textcircled{3} q''' + \textcircled{s} \mathfrak{Q} \\ \quad + \textcircled{s} [(q^{iv} - \mathfrak{Q}) \cos 2\mathfrak{L} + (p^{iv} - \mathfrak{P}) \sin 2\mathfrak{L}], \\ \frac{dq^{iv}}{dt} = (\textcircled{0} + \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{s}) p^{iv} - \textcircled{0} p - \textcircled{1} p' - \textcircled{2} p'' - \textcircled{3} p''' - \textcircled{s} \mathfrak{P} \\ \quad - \textcircled{s} [(q^{iv} - \mathfrak{Q}) \sin 2\mathfrak{L} - (p^{iv} - \mathfrak{P}) \cos 2\mathfrak{L}]. \end{cases}$$

35. Les équations (2) sont tout à fait de même forme que les équations (1), et elles forment avec ces dernières un système de dix équations différentielles simultanées entre les dix variables $p, p', p'', p''', p^{iv}, q, q', q'', q''', q^{iv}$, auxquelles on peut appliquer la méthode du chapitre IV.

Commençons par négliger dans ces équations les termes périodiques et les termes en $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$: il viendra le système d'équations linéaires

$$(3) \begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\{(\textcircled{0},1) + (\textcircled{0},2) + (\textcircled{0},3) + (\textcircled{0}) + [\textcircled{0}]\} q + (\textcircled{0},1) q' + (\textcircled{0},2) q'' + (\textcircled{0},3) q''' + (\textcircled{0}) q^{iv}, \\ \frac{dp'}{dt} = -\{(1,0) + (1,2) + (1,3) + (1) + [1]\} q' + (1,0) q + (1,2) q'' + (1,3) q''' + (1) q^{iv}, \\ \frac{dp''}{dt} = -\{(2,0) + (2,1) + (2,3) + (2) + [2]\} q'' + (2,0) q + (2,1) q' + (2,3) q''' + (2) q^{iv}, \\ \frac{dp'''}{dt} = -\{(3,0) + (3,1) + (3,2) + (3) + [3]\} q''' + (3,0) q + (3,1) q' + (3,2) q'' + (3) q^{iv}, \\ \frac{dp^{iv}}{dt} = -(\textcircled{0} + \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{s}) q^{iv} + \textcircled{0} q + \textcircled{1} q' + \textcircled{2} q'' + \textcircled{3} q'''; \\ \frac{dq}{dt} = \{(\textcircled{0},1) + (\textcircled{0},2) + (\textcircled{0},3) + (\textcircled{0}) + [\textcircled{0}]\} p - (\textcircled{0},1) p' - (\textcircled{0},2) p'' - (\textcircled{0},3) p''' - (\textcircled{0}) p^{iv}, \\ \dots \end{cases}$$

Ces équations, augmentées des termes $[\textcircled{0}] \mathfrak{Q}$, $[\textcircled{0}] \mathfrak{P}$, ..., sont celles qu'on obtiendrait si l'on cherchait seulement les inégalités séculaires.

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = N \sin(bt + \gamma) + N_1 \sin(b_1 t + \gamma_1) + N_2 \sin(b_2 t + \gamma_2) + N_3 \sin(b_3 t + \gamma_3) + \dots + N_n \sin(b_n t + \gamma_n), \\ p' = \alpha' N \sin(bt + \gamma) + \alpha'_1 N_1 \sin(b_1 t + \gamma_1) + \alpha'_2 N_2 \sin(b_2 t + \gamma_2) + \alpha'_3 N_3 \sin(b_3 t + \gamma_3) + \dots + \alpha'_n N_n \sin(b_n t + \gamma_n), \\ \dots \dots \dots \\ p^{iv} = \alpha^{iv} N \sin(bt + \gamma) + \alpha^{iv}_1 N_1 \sin(b_1 t + \gamma_1) + \dots + \alpha^{iv}_n N_n \sin(b_n t + \gamma_n); \\ q = N \cos(bt + \gamma) + N_1 \cos(b_1 t + \gamma_1) + \dots + N_n \cos(b_n t + \gamma_n), \\ q' = \alpha' N \cos(bt + \gamma) + \alpha'_1 N_1 \cos(b_1 t + \gamma_1) + \dots + \alpha'_n N_n \cos(b_n t + \gamma_n), \\ \dots \dots \dots \\ q^{iv} = \alpha^{iv} N \cos(bt + \gamma) + \alpha^{iv}_1 N_1 \cos(b_1 t + \gamma_1) + \dots + \alpha^{iv}_n N_n \cos(b_n t + \gamma_n). \end{array} \right.$$
$$(5) \left\{ \begin{aligned} & -\{b + (0,1) + (0,2) + (0,3) + (0) + [0]\}N + (0,1)N' + (0,2)N'' + (0,3)N''' + (0)N^{iv} = 0, \\ & (1,0)N - \{b + (1,0) + (1,2) + (1,3) + (1) + [1]\}N' + (1,2)N'' + (1,3)N''' + (1)N^{iv} = 0, \\ & (2,0)N + (2,1)N' - \{b + (2,0) + (2,1) + (2,3) + (2) + [2]\}N'' + (2,3)N''' + (2)N^{iv} = 0, \\ & (3,0)N + (3,1)N' + (3,2)N'' - \{b + (3,0) + (3,1) + (3,2) + (3) + [3]\}N''' + (3)N^{iv} = 0, \\ & (0)N + (1)N' + (2)N'' + (3)N''' - \{b + (0) + (1) + (2) + (3) + (s)\}N^{iv} = 0. \end{aligned} \right.$$
$$\begin{array}{ccccccccc} -\{b+(0,1)+\dots+[0]\} & (0,1) & & (0,2) & & (0,3) & & (0) & \\ (1,0) & -\{b+(1,0)+\dots+[1]\} & (1,2) & & (1,3) & & (1) & & \\ (2,0) & (2,1) & -\{b+(2,0)+\dots+[2]\} & (2,3) & & (2) & & & \\ (3,0) & (3,1) & (3,2) & -\{b+(3,0)+\dots+[3]\} & (3) & & & & \\ \textcircled{0} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & -\{b+\textcircled{0}+\dots+\textcircled{x}\} & & & & \end{array} = 0.$$

L'équation (6) n'a pas de racine nulle : cette différence avec l'équation analogue qu'on rencontre dans la théorie des planètes tient à la présence des nombres $[0]$, $[1]$, $[2]$, $[3]$, (s) dans les éléments principaux du déterminant. Mais il est facile de reconnaître qu'elle a aussi toutes ses racines réelles : car les coefficients

sont liés entre eux par les relations

$$mna^2(0,1) = m' n' a'^2(1,0), \quad mna^2(0,2) = m'' n'' a''^2(2,0), \dots$$

$$mna^2(0) = K \frac{4iC}{3(2C - A - B)} \textcircled{0}, \dots$$

36. Les formules (4) pourront représenter les intégrales des équations complètes (1) et (2), si l'on convient d'y faire varier les quantités $N, N_1, N_2, N_3, N_4, \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. Pour cela nous suivrons absolument la même marche que dans les nos 30 et 31.

Posons

$$I = \frac{mna^2}{mna^2 + m' n' a'^2 \alpha'^2 + \dots + m'' n'' a''^2 \alpha''^2 + J \alpha^{1v}},$$

$$I' = \frac{m' n' a'^2 \alpha'}{mna^2 + m' n' a'^2 \alpha'^2 + \dots + J \alpha^{1v}}, \dots,$$

jusqu'à

$$I^{1v} = \frac{J \alpha^{1v}}{mna^2 + m' n' a'^2 \alpha'^2 + \dots + J \alpha^{1v}},$$

J désignant le rapport $K \frac{4iC}{3(2C - A - B)}$; désignons de même par $I_1, I'_1, \dots, I_2, I'_2, \dots$ les mêmes expressions où l'on a seulement remplacé les quantités α respectivement par les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ qui se rapportent aux autres racines de l'équation (6). Pour obtenir les intégrales des équations (1) et (2), il faudra ajouter aux valeurs de $p, q, p', \dots$, données par les formules (4), des termes de cinq espèces différentes, provenant des cinq espèces de termes négligés d'abord.

1° *Termes complémentaires provenant de* $[0]\mathfrak{Q}, [1]\mathfrak{Q}, \dots, [0]\mathfrak{Q}, [1]\mathfrak{Q}, \dots$, etc.
—Les quantités $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}$ seront données par la théorie de Jupiter sous la forme

$$\mathfrak{Q} = \Sigma S \sin(st + \sigma), \quad \mathfrak{Q} = \Sigma S \cos(st + \sigma);$$

en effectuant les calculs, on trouve qu'il faut ajouter *au terme* $N \sin(bt + \gamma)$ *de* p *l'expression*

$$\{I[0] + I'[1] + I''[2] + I'''[3] + I^{1v} \textcircled{0}\} \Sigma \frac{S}{s-b} \sin(st + \sigma),$$

et au terme $N \cos(bt + \gamma)$ *de* q *l'expression analogue*

$$\{I[0] + I'[1] + \dots\} \Sigma \frac{S}{s-b} \cos(st + \sigma);$$

de même aux termes $N_1 \sin (b_1 t + \gamma_1)$, $N_1 \cos (b_1 t + \gamma_1)$ les expressions

$$\{I_1[0] + I_1[1] + \dots + I_1'' \odot\} \sum \frac{S}{s - b_1} \sin(st + \sigma),$$

$$\{I_1[0] + I_1[1] + \dots\} \sum \frac{S}{s - b_1} \cos(st + \sigma),$$

et de même aussi pour chacune des trois autres parties.

Ayant les accroissements des divers termes de p , on aura ceux des termes de p' en les multipliant respectivement par α' , α'_1 , α'_2 , α'_3 et α'_4 ; et ainsi de suite pour chacune des autres variables.

2° *Termes complémentaires provenant de $2 \cos 2\mathcal{L}$, $\mathcal{P} \sin 2\mathcal{L}$, $2 \sin 2\mathcal{L}$ et $\mathcal{P} \cos 2\mathcal{L}$.*
— Il faut ajouter au terme $N \sin (bt + \gamma)$ de p l'expression

$$- \{I[0] + I[1] + \dots + I'' \odot\} \sum \frac{S}{2\mathcal{H} - s - b} \sin(2\mathcal{L} - st - \sigma),$$

et au terme $N \cos (bt + \gamma)$ de q l'expression

$$- \{I[0] + I[1] + \dots\} \sum \frac{S}{2\mathcal{H} - s - b} \cos(2\mathcal{L} - st - \sigma);$$

et pareillement aux termes $N_1 \sin (b_1 t + \gamma_1)$, $N_1 \cos (b_1 t + \gamma_1)$ les expressions

$$- \{I_1[0] + I_1[1] + \dots + I_1'' \odot\} \sum \frac{S}{2\mathcal{H} - s - b_1} \sin(2\mathcal{L} - st - \sigma),$$

$$- \{I_1[0] + \dots\} \sum \frac{S}{2\mathcal{H} - s - b_1} \cos(2\mathcal{L} - st - \sigma);$$

et ainsi de suite.

3° *Termes complémentaires provenant de $q \cos 2\mathcal{L}$, $p \sin 2\mathcal{L}$, $q' \cos 2\mathcal{L}$, ..., $q \sin 2\mathcal{L}$, $p \cos 2\mathcal{L}$, etc.* — Il faut ajouter au terme $N \sin (bt + \gamma)$ de p l'expression

$$\frac{I[0] + I'\alpha'[1] + I''\alpha''[2] + I'''\alpha'''[3] + I'''\alpha'''' \odot}{2\mathcal{H} - 2b} N \sin(2\mathcal{L} - bt - \gamma)$$

$$+ \frac{I[0] + I'\alpha'_1[1] + I''\alpha''_1[2] + \dots}{2\mathcal{H} - b - b_1} N_1 \sin(2\mathcal{L} - b_1 t - \gamma_1)$$

$$+ \frac{I[0] + I'\alpha'_2[1] + I''\alpha''_2[2] + \dots}{2\mathcal{H} - b - b_2} N_2 \sin(2\mathcal{L} - b_2 t - \gamma_2) + \dots$$

qui est composée de cinq termes; et de même au terme $N \cos (bt + \gamma)$ de q , l'expression

$$\frac{I[0] + I'\alpha'[1] + I''\alpha''[2] + \dots}{2\mathcal{H} - 2b} N \cos(2\mathcal{L} - bt - \gamma)$$

$$+ \frac{I[0] + I'\alpha'_1[1] + \dots}{2\mathcal{H} - b - b_1} N_1 \cos(2\mathcal{L} - b_1 t - \gamma_1) + \dots$$

De même au terme $N_1 \sin(b_1 t + \gamma_1)$ il faut ajouter la quantité

$$\begin{aligned} & \frac{I_1[0] + I'_1 \alpha'_1[1] + I''_1 \alpha''_1[2] + \dots}{2\mathfrak{H} - b_1 - b} N \sin(2\mathfrak{L} - bt - \gamma) \\ & + \frac{I_1[0] + I'_1 \alpha'_1[1] + I''_1 \alpha''_1[2] + \dots}{2\mathfrak{H} - 2b_1} N_1 \sin(2\mathfrak{L} - b_1 t - \gamma_1) \\ & + \frac{I_1[0] + I'_1 \alpha'_1[1] + I''_1 \alpha''_1[2] + \dots}{2\mathfrak{H} - b_1 - b_2} N_2 \sin(2\mathfrak{L} - b_2 t - \gamma_2) + \dots \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

4° Termes complémentaires provenant de $\cos(4l' - 2l)$ et $\sin(4l' - 2l)$. — A cause de la relation

$$4l'' - 2l' = 360^\circ + 4l' - 2l,$$

les termes en $4l'' - 2l'$ des équations différentielles se réunissent à ceux en $4l' - 2l$.

Il faut ajouter au terme $N \sin(bt + \gamma)$ de p l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{(I_{\boxed{0,1}} - I'_{\boxed{1,0}})(1 - \alpha') + (I'_{\boxed{1,2}} - I''_{\boxed{2,1}})(\alpha' - \alpha'')}{4n' - 2n - 2b} N \sin(4l' - 2l - bt - \gamma) \\ & + \frac{(I_{\boxed{0,1}} - I'_{\boxed{1,0}})(1 - \alpha'_1) + (I'_{\boxed{1,2}} - I''_{\boxed{2,1}})(\alpha'_1 - \alpha''_1)}{4n' - 2n - b - b_1} N_1 \sin(4l' - 2l - b_1 t - \gamma_1) \\ & + \frac{(I_{\boxed{0,1}} - I'_{\boxed{1,0}})(1 - \alpha'_2) + (I'_{\boxed{1,2}} - I''_{\boxed{2,1}})(\alpha'_2 - \alpha''_2)}{4n' - 2n - b - b_2} N_2 \sin(4l' - 2l - b_2 t - \gamma_2) \\ & + \dots \end{aligned}$$

formée de cinq termes, et au terme $N \cos(bt + \gamma)$ de q la même expression en y remplaçant seulement les sinus par les cosinus; de même, au terme $N_1 \sin(b_1 t + \gamma_1)$ il faut ajouter

$$\begin{aligned} & \frac{(I_{\boxed{0,1}} - I'_{\boxed{1,0}})(1 - \alpha') + (I'_{\boxed{1,2}} - I''_{\boxed{2,1}})(\alpha' - \alpha'')}{4n' - 2n - b_1 - b} N \sin(4l' - 2l - b_1 t - \gamma) \\ & + \frac{(I_{\boxed{0,1}} - I'_{\boxed{1,0}})(1 - \alpha'_1) + (I'_{\boxed{1,2}} - I''_{\boxed{2,1}})(\alpha'_1 - \alpha''_1)}{4n' - 2n - 2b_1} N_1 \sin(4l' - 2l - b_1 t - \gamma_1) \\ & + \frac{(I_{\boxed{0,1}} - I'_{\boxed{1,0}})(1 - \alpha'_2) + (I'_{\boxed{1,2}} - I''_{\boxed{2,1}})(\alpha'_2 - \alpha''_2)}{4n' - 2n - b_1 - b_2} N_2 \sin(4l' - 2l - b_2 t - \gamma_2) \\ & + \dots \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

5° Termes complémentaires dus à l'aplatissement. — Il faut ajouter au terme $N \sin(bt + \gamma)$ de p l'expression

$$\begin{aligned} I(0) & \left[\frac{1 - \alpha^{IV}}{2n - 2b} N \sin(2l - bt - \gamma) + \frac{1 - \alpha_1^{IV}}{2n - b - b_1} N_1 \sin(2l - b_1 t - \gamma_1) \right. \\ & \quad + \frac{1 - \alpha_2^{IV}}{2n - b - b_2} N_2 \sin(2l - b_2 t - \gamma_2) + \frac{1 - \alpha_3^{IV}}{2n - b - b_3} N_3 \sin(2l - b_3 t - \gamma_3) \\ & \quad \left. + \frac{\alpha - \alpha_1^{IV}}{2n - b - b_1} N_1 \sin(2l - b_1 t - \gamma_1) \right] \\ + I'(1) & \left[\frac{\alpha' - \alpha^{IV}}{2n' - 2b} N \sin(2l' - bt - \gamma) + \frac{\alpha'_1 - \alpha_1^{IV}}{2n' - b - b_1} N_1 \sin(2l' - b_1 t - \gamma_1) + \dots \right] \\ + I''(2) & \left[\frac{\alpha'' - \alpha^{IV}}{2n'' - 2b} N \sin(2l'' - bt - \gamma) + \frac{\alpha''_1 - \alpha_1^{IV}}{2n'' - b - b_1} N_1 \sin(2l'' - b_1 t - \gamma_1) + \dots \right] \\ + I'''(3) & \left[\frac{\alpha''' - \alpha^{IV}}{2n''' - 2b} N \sin(2l''' - bt - \gamma) + \frac{\alpha'''_1 - \alpha_1^{IV}}{2n''' - b - b_1} N_1 \sin(2l''' - b_1 t - \gamma_1) + \dots \right] \end{aligned}$$

formée de quatre lignes dont chacune contient cinq termes; et au terme $N \cos(bt + \gamma)$ de q , la même expression en y changeant les cosinus en sinus.

De même, au terme $N_1 \sin(b_1 t + \gamma_1)$ il faut ajouter la quantité

$$\begin{aligned} I_1(0) & \left[\frac{1 - \alpha^{IV}}{2n - b_1 - b} N \sin(2l - bt - \gamma) + \frac{1 - \alpha_1^{IV}}{2n - 2b_1} N_1 \sin(2l - b_1 t - \gamma_1) \right. \\ & \quad + \frac{1 - \alpha_2^{IV}}{2n - b_1 - b_2} N_2 \sin(2l - b_2 t - \gamma_2) + \frac{1 - \alpha_3^{IV}}{2n - b_1 - b_3} N_3 \sin(2l - b_3 t - \gamma_3) \\ & \quad \left. + \frac{1 - \alpha_1^{IV}}{2n - b_1 - b_1} N_1 \sin(2l - b_1 t - \gamma_1) \right] \\ + I_1'(1) & \left[\frac{\alpha' - \alpha^{IV}}{2n' - b_1 - b} N \sin(2l' - bt - \gamma) + \frac{\alpha'_1 - \alpha_1^{IV}}{2n' - 2b_1} N_1 \sin(2l' - b_1 t - \gamma_1) + \dots \right] \\ + I_1''(2) & \left[\frac{\alpha'' - \alpha^{IV}}{2n'' - b_1 - b} N \sin(2l'' - bt - \gamma) + \frac{\alpha''_1 - \alpha_1^{IV}}{2n'' - 2b_1} N_1 \sin(2l'' - b_1 t - \gamma_1) + \dots \right] \\ + I_1'''(3) & \left[\frac{\alpha''' - \alpha^{IV}}{2n''' - b_1 - b} N \sin(2l''' - bt - \gamma) + \frac{\alpha'''_1 - \alpha_1^{IV}}{2n''' - 2b_1} N_1 \sin(2l''' - b_1 t - \gamma_1) + \dots \right] \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

37. Les formules (4), complétées par les termes précédents, donnent les valeurs des variables p , q , p' , ..., et font connaître tout ensemble la position des plans des orbites des satellites et celle de l'équateur de Jupiter par rapport au plan fixe. On en déduira aisément les latitudes des satellites par rapport au même plan fixe, au moyen de la formule

$$\sin \lambda = \sin(\nu - \theta) \sin \varphi,$$

qui donne, en négligeant le carré de l'inclinaison,

$$\lambda = \varphi \sin(\nu - \theta),$$

ou bien

$$\lambda = q \sin \nu - p \cos \nu.$$

Si dans cette formule on remplace p et q par les valeurs (4), on obtient pour le premier satellite

$$\lambda = N \sin(\nu - bt - \gamma) + N_1 \sin(\nu - b_1 t - \gamma_1) + \dots$$

et des expressions semblables pour les trois autres. Ces valeurs sont analogues à celles que donne Laplace (liv. VIII, n° 10), et elles fourniront sans doute les termes principaux des latitudes, parmi ceux qui ne dépendent que des variations séculaires des éléments; toutefois il faudra recourir aux valeurs numériques pour savoir s'il est permis de négliger les termes très-nombreux qu'amèneront les expressions du n° 36, et dont Laplace ne tient aucun compte.

Il importe, dans la question des éclipses, d'obtenir les latitudes des satellites au-dessus de l'orbite vraie de Jupiter. La position de cette orbite par rapport au plan fixe est déterminée, pour l'époque t , par les variables $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}'$ qui font connaître les angles Θ et Φ ; celle de l'équateur vrai le sera par p^{iv} et q^{iv} qui donneront ω et ψ , et l'intersection de ces deux plans déterminera l'équinoxe vrai. Si nous désignons par L et Λ la longitude et la latitude rapportées à l'orbite variable de Jupiter, la longitude étant comptée à partir de l'équinoxe vrai, ces nouvelles coordonnées seront exprimées au moyen des anciennes ν , et λ , ainsi que des quantités Φ , Θ , ω , ψ , par les deux formules suivantes, où l'on néglige encore les carrés des inclinaisons :

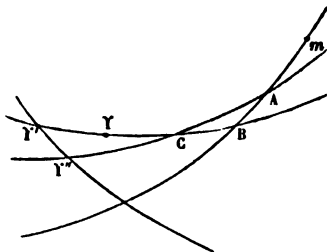
$$L = \nu + \psi + \Phi \tan \lambda \cos(\nu - \Theta) - \Phi \sin(\Theta + \psi) \cot \omega,$$

$$\Lambda = \lambda - \Phi \sin(\nu - \Theta).$$

(*Annales de l'Observatoire*, t. II, p. 175.)

On peut suivre une marche différente et obtenir les quantités L et Λ sans passer par les intermédiaires p , q , φ , θ , ν , λ .

Considérons la sphère céleste jovicentrique, et soient CB, CA, BA, Y'Y'' les traces



respectives, sur cette sphère, du plan fixe, de l'orbite de Jupiter à l'instant considéré, de l'orbite du satellite m et de l'équateur de Jupiter au même instant.

Soit Y l'origine des longitudes sur le plan fixe : on aura

$$CY = \Theta, \quad BY = \theta, \quad \text{angle } C = \Phi, \quad \text{angle } ABC = 180^\circ - \varphi.$$

Désignons par γ l'inclinaison BAC de l'orbite de m sur l'orbite de Jupiter, et par τ la *longitude dans l'orbite* du nœud A de l'orbite de m sur l'orbite de Jupiter, en sorte que τ se compose des angles $\Upsilon C = \Theta$ et CA, non situés dans le même plan. Le triangle ABC donnera

$$\begin{aligned}\sin \varphi \cos(\theta - \Theta) &= \cos \gamma \sin \Phi + \sin \gamma \cos \Phi \cos(\tau - \Theta), \\ \sin \varphi \sin(\theta - \Theta) &= \sin \gamma \sin(\tau - \Theta),\end{aligned}$$

ou bien, en négligeant les carrés des inclinaisons,

$$\varphi \cos(\theta - \Theta) = \Phi + \gamma \cos(\tau - \Theta), \quad \varphi \sin(\theta - \Theta) = \gamma \sin(\tau - \Theta),$$

et par suite les deux formules

$$\begin{aligned}\varphi \sin \theta &= \Phi \sin \Theta + \gamma \sin \tau, \\ \varphi \cos \theta &= \Phi \cos \Theta + \gamma \cos \tau.\end{aligned}$$

Les quantités $\gamma \sin \tau$, $\gamma \cos \tau$ sont de même espèce que $\varphi \sin \theta$ et $\varphi \cos \theta$; il faut seulement observer que la longitude τ se compte comme toutes les autres à partir du point fixe Υ , et non à partir de l'équinoxe vrai Υ'' .

Si nous posons

$$\gamma \sin \tau = x, \quad \gamma \cos \tau = y,$$

il viendra

$$p = \Phi + x, \quad q = \mathfrak{Q} + y.$$

Posons de même pour le second satellite

$$\gamma' \sin \tau' = x', \quad \gamma' \cos \tau' = y',$$

et de même pour les deux autres; enfin, appelons ω , l'inclinaison de l'équateur vrai sur l'orbite actuelle, et $-\psi$, la longitude du nœud descendant de cet équateur sur cette orbite, comptée aussi à partir du point fixe Υ , en sorte qu'on ait $\psi = C\Upsilon'' - C\Upsilon$, et posons

$$x'' = \omega \sin \psi, \quad y'' = -\omega \cos \psi.$$

On aura pareillement

$$p' = \Phi + x', \quad q' = \mathfrak{Q} + y', \dots, \quad p'' = \Phi + x'', \quad q'' = \mathfrak{Q} + y''.$$

D'après cela, si dans les équations (1) et (2) on remplace p , q , p' , ..., par ces valeurs, et si l'on observe que $\frac{d\Phi}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{Q}}{dt}$ sont des quantités qu'on peut supposer connues et de la forme $\Sigma S \cos(st + \sigma)$, $-\Sigma S \sin(st + \sigma)$, on obtiendra entre les

nouvelles variables $x, x', x'', \dots, y, y', y'', \dots$, les dix équations différentielles simultanées qui suivent :

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= - \{ (0,1) + (0,2) + (0,3) + (0) + [0] \} y + (0,1) y' + (0,2) y'' + (0,3) y''' + (0) y^{iv} \\
 &\quad - \Sigma S \cos(st + \sigma) + [0] (y \cos 2\ell + x \sin 2\ell) + [0,1] [(y - y') \cos(4l' - 2l) + (x - x') \sin(4l' - 2l)] \\
 &\quad + (0) [(y - y^{iv}) \cos 2l + (x - x^{iv}) \sin 2l]; \\
 \frac{dx'}{dt} &= - \{ (1,0) + (1,2) + (1,3) + (1) + [1] \} y' + (1,0) y + (1,2) y'' + (1,3) y''' + (1) y^{iv} \\
 &\quad - \Sigma S \cos(st + \sigma) + [1] (y' \cos 2\ell + x' \sin 2\ell) + [1,0] [(y' - y) \cos(4l' - 2l) + (x' - x) \sin(4l' - 2l)] \\
 &\quad + [1,2] [(y' - y'') \cos(4l'' - 2l') + (x' - x'') \sin(4l'' - 2l')] \\
 &\quad + (1) [(y' - y^{iv}) \cos 2l' + (x' - x^{iv}) \sin 2l']; \\
 \frac{dx''}{dt} &= - \{ (2,0) + (2,1) + (2,3) + (2) + [2] \} y'' + (2,0) y + (2,1) y' + (2,3) y''' + (2) y^{iv} \\
 &\quad - \Sigma S \cos(st + \sigma) + [2] (y'' \cos 2\ell + x'' \sin 2\ell) + [2,1] [(y'' - y') \cos(4l'' - 2l') + (x'' - x') \sin(4l'' - 2l')] \\
 &\quad + (2) [(y'' - y^{iv}) \cos 2l'' + (x'' - x^{iv}) \sin 2l'']; \\
 \frac{dx'''}{dt} &= - \{ (3,0) + (3,1) + (3,2) + (3) + [3] \} y''' + (3,0) y + (3,1) y' + (3,2) y'' + (3) y^{iv} \\
 &\quad - \Sigma S \cos(st + \sigma) + [3] (y''' \cos 2\ell + x''' \sin 2\ell) + (3) [(y''' - y^{iv}) \cos 2l''' + (x''' - x^{iv}) \sin 2l''']; \\
 \frac{dx^{iv}}{dt} &= - \{ (0) + (1) + (2) + (3) + (4) \} y^{iv} + (0) y + (1) y' + (2) y'' + (3) y''' \\
 &\quad - \Sigma S \cos(st + \sigma) + (4) (y^{iv} \cos 2\ell + x^{iv} \sin 2\ell); \\
 \frac{dy}{dt} &= \{ (0,1) + (0,2) + (0,3) + (0) + [0] \} x - (0,1) x' - (0,2) x'' - (0,3) x''' - (0) x^{iv} \\
 &\quad + \Sigma S \sin(st + \sigma) - [0] (y \sin 2\ell - x \cos 2\ell) - [0,1] [(y - y') \sin(4l' - 2l) - (x - x') \cos(4l' - 2l)] \\
 &\quad - (0) [(y - y^{iv}) \sin 2l - (x - x^{iv}) \cos 2l]; \\
 \frac{dy'}{dt} &= \dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Ces équations sont absolument de la même forme que les équations (1) et (2) et elles s'intègrent de même : il y aura une petite simplification résultant de l'absence des termes complémentaires de la seconde espèce.

Après avoir obtenu les valeurs de $x, y, x', \dots$, on obtiendra les latitudes cherchées par la formule

$$\sin \Lambda = \sin(\nu - \tau) \sin \gamma,$$

ν désignant la longitude vraie, formée des trois parties $YC + CA + Am$ situées dans trois plans différents. Cette formule donne, aux quantités près du second ordre,

$$\Lambda = \gamma \sin \nu - x \cos \nu.$$

Quant aux longitudes L , on les obtiendra par la formule

$$\text{tang}(L - \tau) = \text{tang}(\nu - \tau) \cos \gamma,$$

ou bien par l'une des formules qu'on peut en déduire, l'angle L étant compté ici à partir du point fixe Υ . Pour rapporter cet angle à l'équinoxe vrai Υ'' , il suffira d'y ajouter la quantité

$$C\Upsilon'' - C\Upsilon = \psi - \Phi \sin(\Theta + \psi) \cot \omega.$$

CHAPITRE VI.

VALEURS NOUVELLES DES INÉGALITÉS PÉRIODIQUES. — ÉQUATIONS SÉCULAIRES DES LONGITUDES MOYENNES.

38. Un certain nombre des inégalités périodiques calculées au chapitre II n'offrent pas une exactitude suffisante, parce qu'on s'est contenté, pour les obtenir, de corriger les longitudes des nœuds et des périjoves de leurs variations séculaires. Nous allons revenir sur ces inégalités pour les rectifier, en faisant usage des valeurs plus exactes obtenues dans les chapitres IV et V pour les éléments e , ϖ , φ , θ , ou, ce qui revient au même, pour les variables h , k , p , q que nous leur avons substituées.

On sait qu'il n'y a rien à modifier aux inégalités trouvées pour les excentricités et les longitudes des périjoves, et par suite rien dans les termes principaux des rayons vecteurs et des longitudes vraies : dans les valeurs de ces deux coordonnées, les modifications ne porteront donc que sur les deux parties d'importance secondaire ∂a et ∂l . Dans les latitudes, au contraire, tout devra être retouché, sauf ce qui provient de $\varphi \partial \nu \cos(\nu - \theta)$.

D'après cela nous aurons à corriger, parmi les inégalités des grands axes et des longitudes moyennes, celles qui dépendent des excentricités, et, parmi les inégalités des inclinaisons et des longitudes des nœuds, celles qui dépendent des inclinaisons, c'est-à-dire toutes celles que nous avons conservées. Occupons-nous d'abord des premières.

39. Le premier terme à rectifier dans ∂a est celui qui dépend de l'angle $2l' - l$: on l'a obtenu en prenant dans la fonction $R_{(0,1)}$ la partie

$$A e \cos(2l' - l - \varpi) + \left(B - \frac{2a}{a'^2}\right) e' \cos(2l' - l - \varpi').$$

En y introduisant les variables h , k , h' , k' , cette partie devient

$$R_{(0,1)} = \left[A k + \left(B - \frac{2a}{a'^2}\right) k' \right] \cos(2l' - l) + \left[A h + \left(B - \frac{2a}{a'^2}\right) h' \right] \sin(2l' - l),$$

et par suite, en ne considérant que ces termes, on aura

$$\frac{da}{dt} = \frac{2m'a'n}{\mu} \left\{ \left[A k + \left(B - \frac{2a}{a'^2} \right) k' \right] \sin(2l' - l) - \left[A h + \left(B - \frac{2a}{a'^2} \right) h' \right] \cos(2l' - l) \right\}.$$

Dans cette formule nous remplacerons h, k, h', k' , par les valeurs du chapitre IV; si nous prenons seulement les premiers termes de ces valeurs, savoir :

$$h = M \sin(gt + \beta), \quad k = M \cos(gt + \beta), \quad h' = \lambda' M \sin(gt + \beta), \quad k' = \lambda' M \cos(gt + \beta),$$

il viendra

$$\frac{da}{dt} = \frac{2m'a'n}{\mu} \left[A + \left(B - \frac{2a}{a'^2} \right) \lambda' \right] M \sin(2l' - l - gt - \beta),$$

et par suite l'inégalité

$$(1) \quad \partial a = - \frac{2m'a}{\mu} \frac{n}{2n' - n - g} \left[a A + \left(a B - \frac{2a^2}{a'^2} \right) \lambda' \right] M \cos(2l' - l - gt - \beta).$$

En considérant ensuite les seconds termes des mêmes valeurs, savoir ceux qui se rapportent à la racine g_1 , on aura pareillement l'inégalité

$$\partial a = - \frac{2m'a}{\mu} \frac{n}{2n' - n - g_1} \left[a A + \left(a B - \frac{2a^2}{a'^2} \right) \lambda'_1 \right] M_1 \cos(2l' - l - g_1 t - \beta_1).$$

Chacune des racines g_2 et g_3 donnera aussi un terme pareil. Mais ce ne sont pas les seuls qu'on puisse obtenir : chacun des termes que présentent les formules (14) et (15) du chapitre IV (excepté ceux d'argument $2l' - l$) fournira une nouvelle inégalité, tout aussi facile à calculer. Observons seulement que dans ces dernières inégalités le diviseur serait notablement différent de $2n' - n$ et cesserait d'être petit, tandis que dans les quatre premières le diviseur se réduit sensiblement à $2n' - n$, à cause de la petitesse des racines g, g_1, g_2, g_3 . Nous pourrions donc nous borner aux quatre inégalités de l'espèce (1).

On trouvera de la même manière, pour le second satellite, que les termes de $\partial a'$ qui dépendent de $2l' - l$ et $2l'' - l'$ doivent être remplacés par les suivants :

$$\begin{aligned} \partial a' &= \frac{4ma'}{\mu'} \frac{n'}{2n' - n - g} \left[a' A + \left(a' B - \frac{a'^2}{2a^2} \right) \lambda' \right] M \cos(2l' - l - gt - \beta) \\ &\quad - \frac{2m''a'}{\mu'} \frac{n'}{2n'' - n' - g} \left[a' A' \lambda' + \left(a' B' - \frac{2a'^2}{a''^2} \right) \lambda'' \right] M \cos(2l'' - l' - g't - \beta'). \end{aligned}$$

qu'on peut grouper dans le terme unique

$$\begin{aligned} \partial a' &= \frac{2a'}{\mu'} \frac{n'}{2n' - n - g} \left\{ 2m \left[a' A + \left(a' B - \frac{a'^2}{2a^2} \right) \lambda' \right] + m'' \left[a' A' \lambda' + \left(a' B' - \frac{2a'^2}{a''^2} \right) \lambda'' \right] \right\} \\ &\quad \times M \cos(2l' - l - gt - \beta). \end{aligned}$$

De même, pour le troisième satellite, l'inégalité du grand axe qui dépend de l'angle $2l'' - l'$ sera remplacée par celle-ci :

$$\partial a'' = \frac{4m'a''}{\mu''} \frac{n''}{2n'' - n' - g} \left[a'' A' \lambda' + \left(a'' B' - \frac{a''^2}{2a'^2} \right) \lambda'' \right] M \cos(2l'' - l' - gt - \beta).$$

Les deux dernières formules sont relatives à la racine g , et à chacune d'elles il faut en ajouter trois autres se rapportant respectivement aux racines g_1, g_2, g_3 .

Il nous reste à rectifier, parmi les inégalités des grands axes, celles qui contiennent le coefficient K . Celle qui se rapporte au premier satellite a été fournie par le terme $\frac{K}{a^2} e \cos(l - \varpi)$ de V ; ce terme peut s'écrire $\frac{K}{a^2} (k \cos l + h \sin l)$, et, en le considérant seul, on a la formule

$$\frac{da}{dt} = \frac{2Kn}{a\mu} (h \cos l - k \sin l).$$

Si dans cette formule on remplace h et k par les premiers termes de leurs valeurs, savoir, $M \sin(gt + \beta)$, $M \cos(gt + \beta)$, il vient

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2Kn}{a\mu} M \sin(l - gt - \beta);$$

d'où l'inégalité

$$(2) \quad \partial a = \frac{2Kn}{a\mu(n - g)} M \cos(l - gt - \beta).$$

A cette inégalité il faut en joindre trois autres toutes pareilles, se rapportant respectivement aux trois autres racines g_1, g_2, g_3 . Mais on ne peut pas se borner là; car ce qui rend importantes ces inégalités, ce n'est pas un petit diviseur, mais bien le coefficient K : nous ne sommes donc pas autorisés à ne pas tenir compte des termes d'arguments $2l' - l, l', \dots, 2l - gt - \beta, \dots$, que présentent les valeurs complètes de h et k (les termes en l ne donneraient rien). Par exemple, si nous prenons

$$h = \mathfrak{A} \sin(2l' - l), \quad k = \mathfrak{A} \cos(2l' - l),$$

il en résultera l'inégalité

$$\partial a = -\frac{2Kn}{a\mu(2n' - 2n)} \mathfrak{A} \cos(2l' - 2l).$$

Lorsqu'on réduira en nombres les formules, les valeurs numériques des coefficients permettront de décider quelles sont celles de ces inégalités qu'on devra conserver, et on en trouvera aisément l'expression analytique.

Ce que nous venons de dire pour le premier satellite s'appliquera sans modifica-

tion à chacun des trois autres, en mettant simplement les éléments de ceux-ci à la place des éléments du premier.

40. Dans la longitude moyenne du premier satellite, il entre des termes en $2l' - l$ de deux provenances différentes; mais ceux que fournit la partie ε sont beaucoup moins considérables, car ils n'ont pour diviseur que la première puissance de $2n' - n$, tandis que ceux qui proviennent de ρ ont pour diviseur $(2n' - n)^2$. La formule qui donne ces derniers peut s'écrire

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{3m'an^2}{\mu} \left\{ \left[Ah + \left(B - \frac{2a}{a'^2} \right) h' \right] \cos(2l' - l) - \left[Ak + \left(B - \frac{2a}{a'^2} \right) k' \right] \sin(2l' - 2l) \right\}.$$

Si l'on y met les valeurs

$$\begin{aligned} h &= M \sin(gt + \beta), & k &= M \cos(gt + \beta), \\ h' &= \lambda' M \sin(gt + \beta), & k' &= \lambda' M \cos(gt + \beta), \end{aligned}$$

on obtiendra par l'intégration l'inégalité

$$(3) \quad \delta\rho = \frac{3m'}{\mu} \frac{n^2}{(2n' - n - g)^2} \left[aA + \left(aB - \frac{2a^2}{a'^2} \right) \lambda' \right] M \sin(2l' - l - gt - \beta).$$

Il est clair que chacune des racines g_1, g_2, g_3 donnera une inégalité pareille, et ici encore, comme dans le cas des grands axes, on pourra n'en pas considérer d'autres.

On trouvera de même, pour le second satellite, que les termes de $\delta\rho'$ qui dépendent de $2l' - l$ et $2l'' - l'$ doivent être remplacés par les suivants :

$$\begin{aligned} \delta\rho' &= -\frac{6m}{\mu'} \frac{n'^2}{(2n' - n - g)^2} \left[a'A + \left(a'B - \frac{a'^2}{2a^2} \right) \lambda' \right] M \sin(2l' - l - gt - \beta), \\ &+ \frac{3m''}{\mu'} \frac{n'^2}{(2n'' - n' - g)^2} \left[a'A'\lambda' + \left(a'B' - \frac{2a'^2}{a'^2} \right) \lambda'' \right] M \sin(2l'' - l' - gt - \beta). \end{aligned}$$

qu'on peut réunir dans le terme unique

$$\begin{aligned} \delta\rho' &= -\frac{3}{\mu'} \frac{n'^2}{(2n' - n - g)^2} \left\{ 2m \left[a'A + \left(a'B - \frac{a'^2}{2a^2} \right) \lambda' \right] + m'' \left[a'A'\lambda' + \left(a'B' - \frac{2a'^2}{a'^2} \right) \lambda'' \right] \right\} \\ &\times M \sin(2l' - l - gt - \beta). \end{aligned}$$

De même aussi, pour le troisième satellite, le terme en $2l'' - l'$ obtenu dans $\delta\rho''$ devra être remplacé par le suivant

$$\delta\rho'' = -\frac{6m'}{\mu''} \frac{n''^2}{(2n'' - n' - g)^2} \left[a''A'\lambda' + \left(a''B' - \frac{a''^2}{2a'^2} \right) \lambda'' \right] M \sin(2l'' - l' - gt - \beta),$$

la dernière formule devant, ainsi que la précédente, être considérée comme quadruple.

Ces inégalités sont celles que donne Laplace (liv. VIII, n° 7), à part la confusion qu'il fait entre les quantités $\frac{a'}{2a^2}$ et $\frac{2a}{a'^2}$, et de même entre les quantités $\frac{a''}{2a'^2}$ et $\frac{2a'}{a''^2}$, confusion qui revient à supposer $n = 2n'$, $n' = 2n''$.

On rectifierait de la même manière les termes provenant de la partie ϵ .

Il nous reste à modifier, parmi les inégalités des longitudes moyennes, celles qui contiennent le coefficient K. Pour le premier satellite, celle qui vient de la partie ρ sera donnée par la formule

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{3Kn^2}{a^2\mu} (h \cos l - k \sin l).$$

Si l'on y substitue les premiers termes des valeurs de h et k , on obtiendra l'inégalité

$$(4) \quad \partial\rho = -\frac{3Kn^2}{(n-g)^2a^2\mu} M \sin(l - gt - \beta),$$

et chacune des racines g_1 , g_2 , g_3 en donnera une pareille. Il faudra joindre en outre à ces inégalités celles que donne la même formule quand on y introduit les autres termes des valeurs de h et de k . Par exemple, les termes $\mathfrak{A} \sin(2l' - l)$, $\mathfrak{A} \cos(2l' - l)$ donnent

$$\partial\rho = -\frac{3Kn^2}{(2n' - 2n)^2a^2\mu} \mathfrak{A} \sin(2l' - 2l).$$

On peut observer que les termes $\mathfrak{B} \sin l$, $\mathfrak{B} \cos l$ ne donneraient rien.

Mais on n'aura pas encore ainsi toutes les inégalités de la longitude moyenne qui contiennent le coefficient K; il faudra prendre aussi celles qui proviennent de ϵ , car elles ont ici la même importance que les autres. On les obtiendra par la formule

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{13}{2} \frac{Kn}{a^2\mu} (h \sin l + k \cos l).$$

Si l'on met dans cette formule les valeurs $h = M \sin(gt + \beta)$, $k = M \cos(gt + \beta)$, on obtiendra l'inégalité

$$(5) \quad \partial\epsilon = \frac{13}{2} \frac{Kn}{(n-g)a^2\mu} M \sin(l - gt - \beta),$$

toute pareille à l'inégalité (4), et qui doit aussi, comme elle, être accompagnée de trois autres analogues relatives aux racines g_1 , g_2 , g_3 .

Les autres termes des valeurs de h et de k donneront encore d'autres inégalités,

et il faudrait les valeurs numériques des coefficients pour savoir celles qu'on peut négliger.

Si dans les formules précédentes on remplace les éléments du premier satellite successivement par ceux du second, du troisième et du quatrième, on obtiendra, pour chacun de ces satellites, les inégalités de la longitude moyenne dépendantes du coefficient K.

Ces inégalités n'ont pas leurs analogues dans les formules de Laplace. Par contre, Laplace obtient (liv. VIII, n° 8) une inégalité analogue à l'évection de la théorie de la Lune; mais plus loin (n° 22), dans la réduction en nombres, il reconnaît qu'elle est insensible pour les deux premiers satellites. Au reste, ainsi que nous l'avons dit au n° 10, il serait très-facile d'obtenir cette inégalité, comme aussi de la rectifier. On l'obtiendrait dans ρ et dans ε au moyen du terme en $2\varphi - l - \Pi$ de $R_{(0,s)}$, mais elle n'a pas plus d'importance que celle qui proviendrait du terme en $2\varphi - 3l + \varpi$, et elle en a moins que celles qui résulteraient, pour l'élément ε , des termes en $\varphi - 2l + \Pi$ et $3\varphi - 2l - \Pi$. Les deux premiers de ces termes introduisent dans ∂v , au moyen des valeurs du n° 14, des inégalités présentant l'argument de la *variation* et plus considérables que les précédentes, parce qu'elles sont indépendantes des excentricités.

41. Nous allons revenir maintenant sur les inégalités des inclinaisons et des longitudes des nœuds, pour en conclure des valeurs plus exactes des latitudes.

Comme dans le chapitre V, nous substituerons aux éléments φ et θ les auxiliaires p et q ; au moyen des formules

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta + \varphi \frac{d\theta}{dt} \cos \theta, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta - \varphi \frac{d\theta}{dt} \sin \theta,$$

on obtiendra, en y remplaçant $\frac{dp}{dt}$ et $\varphi \frac{d\theta}{dt}$ par les valeurs obtenues précédemment, les différentielles des nouvelles variables.

On arrive au même résultat en introduisant les variables $p, q, p', \dots$ dans les fonctions perturbatrices, et employant les deux formules

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{d\Omega}{dq}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{d\Omega}{dp},$$

que l'on déduit aisément des formules adoptées

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{na'\varphi} \frac{d\Omega}{d\theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{na'\varphi} \frac{d\Omega}{d\varphi}.$$

Par l'un ou l'autre de ces deux moyens, on obtiendra pour le premier satellite,

en ne prenant d'abord que la fonction $R_{(0,1)}$, les deux formules

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \frac{m' a n}{\mu} \frac{1}{4} B^{(3)} [(q - q') \cos(4l' - 2l) + (p - p') \sin(4l' - 2l)], \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{m' a n}{\mu} \frac{1}{4} B^{(3)} [(p - p') \cos(4l' - 2l) - (q - q') \sin(4l' - 2l)].\end{aligned}$$

Remplaçons dans les seconds membres les variables p, q, p', q' d'abord par les premiers termes de leurs valeurs,

$$\begin{aligned}p &= N \sin(bt + \gamma), & q &= N \cos(bt + \gamma), \\ p' &= \alpha' N \sin(bt + \gamma), & q' &= \alpha' N \cos(bt + \gamma);\end{aligned}$$

nous obtiendrons, après l'intégration, les deux inégalités

$$\begin{aligned}\partial p &= \frac{m' a}{\mu} \frac{n}{4n' - 2n - b} \frac{1}{4} B^{(3)} (1 - \alpha') N \sin(4l' - 2l - bt - \gamma), \\ \partial q &= \frac{m' a}{\mu} \frac{n}{4n' - 2n - b} \frac{1}{4} B^{(3)} (1 - \alpha') N \cos(4l' - 2l - bt - \gamma).\end{aligned}$$

On pourrait en déduire $\partial\varphi$ et $\varphi\partial\theta$ au moyen des formules

$$\partial\varphi = \sin\theta \partial p + \cos\theta \partial q, \quad \varphi\partial\theta = \cos\theta \partial p - \sin\theta \partial q,$$

et en conclure les inégalités correspondantes de la latitude par la formule

$$\partial\lambda = \partial\varphi \sin(l - \theta) - \varphi\partial\theta \cos(l - \theta).$$

Il sera plus simple de transformer cette dernière en y remplaçant $\partial\varphi$ et $\varphi\partial\theta$: on obtient ainsi $\partial\lambda$ exprimé directement en fonction de ∂p et ∂q par la formule

$$\partial\lambda = -\partial p \cos l + \partial q \sin l.$$

En l'appliquant, on aura l'inégalité

$$(6) \quad \partial\lambda = -\frac{m'}{\mu} \frac{n}{4n' - 2n - b} \frac{1}{4} a B^{(3)} (1 - \alpha') N \sin(4l' - 3l - bt - \gamma),$$

relative à la racine b , et chacune des quatre autres racines b_1, b_2, b_3, b_4 en donnerait une pareille.

Pour le second satellite, on trouvera de même, provenant des actions du premier et du troisième, les inégalités

$$\begin{aligned}\partial\lambda' &= \frac{m}{\mu'} \frac{n'}{4n' - 2n - b} \frac{1}{4} \alpha' B^{(3)} (1 - \alpha') N \sin(3l' - 2l - bt - \gamma) \\ &\quad - \frac{m''}{\mu'} \frac{n'}{4n'' - 2n' - b} \frac{1}{4} \alpha' B^{(3)} (\alpha' - \alpha'') N \sin(4l'' - 3l' - bt - \gamma),\end{aligned}$$

qu'on peut réunir dans la suivante, à cause de $4l'' - 3l' = 360^\circ + 3l' - 2l$,

$$\delta\lambda' = \frac{1}{4\mu'} \frac{n'}{4n' - 2n - b} [m a' B^{(3)}(1 - \alpha') - m'' a' B'^{(3)}(\alpha' - \alpha'')] N \sin(3l' - 2l - bt - \gamma).$$

De même aussi l'action du second produira dans la latitude du troisième l'inégalité

$$\delta\lambda'' = \frac{m'}{\mu''} \frac{n''}{4n'' - 2n' - b} \frac{1}{4} a'' B'^{(3)}(\alpha' - \alpha'') N \sin(3l'' - 2l' - bt - \gamma),$$

laquelle, ainsi que la précédente, doit être regardée comme quintuple.

Ces résultats sont, à part la forme des coefficients, ceux que donne Laplace (liv. VIII, n° 11). Mais il n'est pas probable qu'on puisse se borner là, et ne tenir aucun compte des autres termes de p et q . Si nous prenons en effet les termes

$$\begin{aligned} p &= \mathcal{C} \sin(st + \sigma), & q &= \mathcal{C} \cos(st + \sigma), \\ p' &= \mathcal{C}' \sin(st + \sigma), & q' &= \mathcal{C}' \cos(st + \sigma), \end{aligned}$$

et que nous les portions dans les seconds membres de $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}$, nous obtiendrons les inégalités

$$\delta p = \frac{m' a}{\mu} \frac{n}{4n' - 2n - s} \frac{1}{4} B^{(3)}(\mathcal{C} - \mathcal{C}') \sin(4l' - 2l - st - \sigma), \quad \delta q = \dots,$$

et par suite

$$\delta\lambda = - \frac{m'}{\mu} \frac{n}{4n' - 2n - s} \frac{1}{4} a B^{(3)}(\mathcal{C} - \mathcal{C}') \sin(4l' - 3l - st - \sigma),$$

inégalité qui paraît aussi importante que celle de la formule (6), parce que le diviseur $4n' - 2n - s$ diffère peu de $4n' - 2n$, et qui ne peut être négligée que si les coefficients $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont trop petits. Les valeurs numériques décideront la question.

42. Considérons maintenant les inégalités des latitudes dues à l'action du Soleil. On aura pour le premier satellite

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{3}{4} \frac{\pi}{\mu} \frac{a^3 n}{\mathfrak{A}^3} [(q - \mathfrak{Q}) \cos 2\mathfrak{L} + (p - \mathfrak{P}) \sin 2\mathfrak{L}], \\ \frac{dq}{dt} &= - \frac{3}{4} \frac{\pi}{\mu} \frac{a^3 n}{\mathfrak{A}^3} [(q - \mathfrak{Q}) \sin 2\mathfrak{L} - (p - \mathfrak{P}) \cos 2\mathfrak{L}]. \end{aligned}$$

Dans les parenthèses des seconds membres, ne prenons d'abord que les termes

$$- \mathfrak{Q} \cos 2\mathfrak{L} - \mathfrak{P} \sin 2\mathfrak{L}, \quad - \mathfrak{Q} \sin 2\mathfrak{L} + \mathfrak{P} \cos 2\mathfrak{L},$$

et posons, comme au chapitre V,

$$\mathcal{P} = \Sigma S \sin(st + \sigma), \quad \mathcal{Q} = \Sigma S \cos(st + \sigma);$$

nous obtiendrons les inégalités

$$\delta p = -\frac{3}{4} \frac{\pi}{\mu} \frac{a^3}{\mathcal{A}^3} \Sigma \frac{n}{2\mathcal{K} - s} S \sin(2\mathcal{L} - st - \sigma), \quad \delta q = -\dots,$$

d'où l'inégalité

$$(7) \quad \delta \lambda = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\mu} \frac{a^3}{\mathcal{A}^3} \Sigma \frac{n}{2\mathcal{K} - s} S \sin(2\mathcal{L} - l - st - \sigma),$$

composée d'autant de termes qu'il y en a dans les valeurs de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Prenons maintenant dans les mêmes parenthèses les autres termes

$$q \cos 2\mathcal{L} + p \sin 2\mathcal{L}, \quad q \sin 2\mathcal{L} - p \cos 2\mathcal{L};$$

si nous y remplaçons p et q par les valeurs

$$p = N \sin(bt + \gamma), \quad q = N \cos(bt + \gamma),$$

nous obtiendrons les inégalités

$$\delta p = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\mu} \frac{a^3}{\mathcal{A}^3} \frac{n}{2\mathcal{K} - b} N \sin(2\mathcal{L} - bt - \gamma), \quad \delta q = \dots,$$

et par suite

$$(8) \quad \delta \lambda = -\frac{3}{4} \frac{\pi}{\mu} \frac{a^3}{\mathcal{A}^3} \frac{n}{2\mathcal{K} - b} N \sin 2\mathcal{L} - l - bt - \gamma).$$

La formule (8), ainsi que la formule (7), dépend de l'angle $2\mathcal{L} - l$ qui est l'argument de l'évection : celles que trouve Laplace (au n° 11) dépendent aussi du même angle.

La formule (8) doit être accompagnée de quatre autres qui s'en déduisent en changeant les quantités relatives à la racine b , dans les quantités qui se rapportent aux racines b_1, b_2, b_3, b_4 . Il y aura peut-être lieu, en outre, à tenir compte des autres termes des valeurs de p et q : l'expression des inégalités qui en résulteront s'obtiendra aisément.

Les inégalités produites par l'action du Soleil dans les latitudes du second, du troisième et du quatrième satellite s'obtiendront par les mêmes formules, en y mettant simplement les éléments de ces satellites au lieu de ceux du premier.

43. Il nous reste à étudier les perturbations qui sont dues à l'aplatissement du globe de Jupiter. Elles sont données par les formules

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{K n}{a^2 \mu} [(q - q'') \cos 2l + (p - p'') \sin 2l], \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{K n}{a^2 \mu} [(q - q'') \sin 2l - (p - p'') \cos 2l]. \end{aligned}$$

Si l'on porte dans ces formules les valeurs suivantes, relatives à la racine b ,

$$\begin{aligned} p &= N \sin(bt + \gamma), & q &= N \cos(bt + \gamma), \\ p'' &= \alpha'' N \sin(bt + \gamma), & q'' &= \alpha'' N \cos(bt + \gamma), \end{aligned}$$

on obtiendra les inégalités

$$\begin{aligned} \delta p &= \frac{Kn}{a^2 \mu (2n - b)} (1 - \alpha'') N \sin(2l - bt - \gamma), \\ \delta q &= \frac{Kn}{a^2 \mu (2n - b)} (1 - \alpha'') N \cos(2l - bt - \gamma), \end{aligned}$$

d'où l'on conclut la suivante :

$$(9) \quad \delta \lambda = - \frac{Kn}{a^2 \mu (2n - b)} (1 - \alpha'') N \sin(l - bt - \gamma);$$

et on en obtiendra une pareille pour chacune des quatre racines b_1, b_2, b_3, b_4 .

Les inégalités (9) correspondent à peu près à celles que trouve Laplace (n° 11) en tenant compte des déplacements de l'équateur et de l'orbite de Jupiter. On en obtiendra d'autres en portant dans $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$ les autres termes de p et q , et il faudra encore les valeurs numériques pour décider sûrement quelles sont celles que l'on doit considérer.

Ce qui précède se rapporte au premier satellite, mais s'applique sans modification à chacun des trois autres.

Les formules des nos 41, 42, 43 donneront les inégalités des latitudes, en y ajoutant celles que fournit le terme $\phi \delta \nu \cos(l - \theta)$ telles qu'on les a obtenues au n° 18, savoir :

pour le premier satellite,

$$- \frac{m'}{\mu} \frac{n}{2n' - n} a A \varphi [\sin(2l' - l - \theta) + \sin(2l' - 3l + \theta)];$$

pour le second,

$$+ \frac{1}{\mu'} \frac{n'}{2n' - n} \left[m'' \alpha' A' - m \left(\alpha' B - \frac{\alpha'^2}{2a^2} \right) \right] \varphi [\sin(2l' - l - \theta') - \sin(l - \theta')];$$

pour le troisième,

$$- \frac{m'}{\mu''} \frac{n''}{2n'' - n'} \left(\alpha'' B' - \frac{\alpha''^2}{2a'^2} \right) \varphi'' [\sin(2l'' - l' - \theta'') - \sin(l' - \theta'')].$$

44. Nous indiquerons, pour terminer ce travail, le calcul des *équations séculaires*

des satellites. Les inégalités à longues périodes des longitudes moyennes proviennent à la fois de la partie ρ et de la partie ϵ de la formule $l = \rho + \epsilon$: mais, ainsi qu'on l'a vu, celles que fournit la partie ϵ sont négligeables à côté des autres. Au contraire les inégalités séculaires ne peuvent provenir que de la partie ϵ : en effet, la formule $\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{3}{a^2} \frac{d\Omega}{d\epsilon}$ ne contient que des termes périodiques. Pour obtenir les inégalités cherchées, il faut prendre dans $\frac{d\epsilon}{dt}$ les termes explicitement indépendants du temps et qui sont du second ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons; les termes non périodiques d'ordre zéro ne produiraient par l'intégration que des termes proportionnels au temps : or les équations séculaires sont des inégalités qu'on peut représenter approximativement par des termes proportionnels au carré du temps. On conçoit d'ailleurs que les termes du second ordre non périodiques fourniront, à la seconde approximation, des inégalités de cette espèce : car si dans les formules

$$\begin{aligned} e^2 &= h^2 + k^2, & ee' \cos(\varpi - \varpi') &= hh' + kk', \dots, \\ \varphi^2 &= p^2 + q^2, & \varphi\varphi' \cos(\theta - \theta') &= pp' + qq', \dots, \end{aligned}$$

on remplace les quantités $h, k, h', \dots, p, q, p', \dots$, par les valeurs des chapitres IV et V, le second membre de chacune d'elles prendra la forme

$$F_0 + F \cos(ft + \alpha) + F_1 \cos(f_1 t + \alpha_1) + \dots,$$

$F_0, F, F_1, \dots, f, f_1, \dots, \alpha, \alpha_1, \dots$, désignant des nombres connus, et les nombres $f, f_1, \dots$, étant très-petits; en raison de cette dernière circonstance, on aura approximativement

$$\cos(ft + \alpha) = \cos \alpha - ft \cdot \sin \alpha, \quad \cos(f_1 t + \alpha_1) = \cos \alpha_1 - f_1 t \cdot \sin \alpha_1, \dots,$$

et par suite il entrera dans $\frac{d\epsilon}{dt}$ des termes proportionnels au temps, d'où résulteront dans la longitude des termes proportionnels au carré du temps. Il n'est du reste pas nécessaire de donner aux équations séculaires la forme Lt^2 ; il est même plus exact de les obtenir sous la forme de sinus d'angles qui croissent proportionnellement au temps, mais avec une grande lenteur.

Lorsqu'on ne veut conserver que les termes du second ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, la formule qui donne $\frac{d\epsilon}{dt}$ peut s'écrire

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{d\Omega}{da} + \frac{e}{2na^2} \frac{d\Omega}{de} + \frac{\varphi}{2na^2} \frac{d\Omega}{d\varphi}.$$

Supposons qu'il s'agisse du premier satellite, et ne considérons d'abord que l'action qu'il éprouve du second : nous devons prendre

$$R_{(0,1)} = \frac{1}{8} B^{(1)} [e^2 + e'^2 - \varphi^2 - \varphi'^2 + 2\varphi\varphi' \cos(\theta - \theta')] - \frac{1}{4} B^{(2)} ee' \cos(\varpi - \varpi'),$$

et il en résultera dans $\frac{d\varepsilon}{dt}$ les termes

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} = & -\frac{m' an}{\mu} \frac{B_1^{(1)}}{4} [e^2 + e'^2 - \varphi^2 - \varphi'^2 + 2\varphi\varphi' \cos(\theta - \theta')] + \frac{m' an}{\mu} \frac{B_1^{(2)}}{4} ee' \cos(\varpi - \varpi') \\ & + \frac{1}{2} (0,1) [e^2 - \varphi^2 + \varphi\varphi' \cos(\theta - \theta')] - \frac{1}{2} [0,1] ee' \cos(\varpi - \varpi'). \end{aligned}$$

L'action des satellites m'' et m''' produira des termes analogues.

La fonction perturbatrice relative à l'action du Soleil sera

$$R_{(0,2)} = \frac{3}{8} \frac{a^2}{a^3} [e^2 + e'^2 - \varphi^2 - \varphi'^2 + 2\varphi\varphi' \cos(\theta - \Theta)],$$

et il en résultera les termes

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} = & -2[0] [e^2 + e'^2 - \varphi^2 - \varphi'^2 + 2\varphi\varphi' \cos(\theta - \Theta)] \\ & + \frac{1}{2} [0] e^2 - \frac{1}{2} [0] [\varphi^2 - \varphi\varphi' \cos(\theta - \Theta)]. \end{aligned}$$

Enfin la correction d'aplatissement sera

$$V = \frac{1}{2} \frac{K}{a^3} [e^2 - \varphi^2 - \omega^2 - 2\varphi\omega \cos(\psi + \theta)],$$

et fournira dans $\frac{d\varepsilon}{dt}$ les termes

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} = & 3(0) [e^2 - \varphi^2 - \omega^2 - 2\varphi\omega \cos(\psi + \theta)] \\ & + \frac{1}{2} (0) e^2 - \frac{1}{2} (0) [\varphi^2 + \varphi\omega \cos(\psi + \theta)]. \end{aligned}$$

En réunissant toutes ces expressions on aura la valeur complète de $\frac{d\varepsilon}{dt}$.

Dans cette valeur on remplacera les quantités e^2 , e'^2 , $ee' \cos(\varpi - \varpi')$, ..., φ^2 , φ'^2 , $\varphi\varphi' \cos(\theta - \theta')$, ..., par leurs développements indiqués plus haut, et on négligera les termes constants qui ne donneraient par l'intégration que des termes proportionnels au temps. Cela fait, il ne restera plus qu'à intégrer, et on aura ainsi l'équation séculaire du satellite m . Celles des autres satellites s'obtiendraient absolument

de même. Le nombre des termes dont se composera l'équation séculaire de chaque satellite sera assez considérable : quand on en viendra à la réduction en nombres, il pourra être de beaucoup diminué, mais il serait difficile de prévoir dès à présent quels sont ceux qu'on pourra négliger, et de donner la formule des plus importants.

NOTE.

VALEURS NUMÉRIQUES DES TERMES PRINCIPAUX DES LONGITUDES.

On a vu au n° 16 que les termes principaux des longitudes des trois premiers satellites sont donnés respectivement par les formules

$$(I) \sin(2l' - 2l), \quad (II) \sin(l' - l), \quad (III) \sin(l'' - l'),$$

dans lesquelles on a posé, pour abrégé,

$$\begin{aligned} (I) &= \frac{m'}{\mu} \frac{n}{n-2n'} 2aA = -\frac{m'}{\mu} \frac{n}{n-2n'} (4aA^{(2)} + aA_1^{(2)}), \\ (II) &= \frac{n'}{n-2n'} \left[-\frac{m''}{\mu'} 2a'A' + \frac{m}{\mu'} \left(2a'B - \frac{a'^2}{a^2} \right) \right] \\ &= \frac{n'}{n-2n'} \left[\frac{m''}{\mu'} (4a'A'^{(2)} + a'A_1'^{(2)}) + \frac{m}{\mu'} \left(3a'A'^{(1)} + a'A_1'^{(1)} - \frac{a'^2}{a^2} \right) \right], \\ (III) &= \frac{m'}{\mu''} \frac{n''}{n'-2n''} \left(2a''B' - \frac{a''^2}{a'^2} \right) = \frac{m'}{\mu''} \frac{n''}{n'-2n''} \left(3a''A'^{(1)} + a''A_1'^{(1)} - \frac{a''^2}{a'^2} \right). \end{aligned}$$

Si l'on fait usage des nombres donnés par Laplace, on trouve pour ces coefficients les valeurs suivantes, exprimées en secondes centésimales.

$$(I) = -6052'',7, \quad (II) = 12635'',4, \quad (III) = 808'',65.$$

Mais il faut observer que ces termes ne sont pas les seuls qui dépendent des mêmes arguments. Pour le premier satellite, la partie ∂l de ∂v amènera les deux termes

$$\frac{3}{4} \frac{m'}{\mu} \left(\frac{n}{n'-n} \right)^2 aA^{(2)} \sin(2l' - 2l), \quad \frac{1}{2} \frac{m'}{\mu} \frac{n}{n-n'} aA_1^{(2)} \sin(2l' - 2l),$$

dont les coefficients ont pour valeurs numériques 10'',056 et 8'',457. En outre, lorsqu'on mettra dans l'expression

$$2[\partial e \sin(l - \varpi) - e \partial \varpi \cos(l - \varpi)]$$

les valeurs trouvées au n° 14 pour ∂e et $e \partial \varpi$, on obtiendra, en faisant $i = -2$, l'inégalité nouvelle

$$\frac{m'}{\mu} \frac{n}{2n' - 3n} (-4a\Lambda^{(2)} + a\Lambda_1^{(2)}) \sin(2l' - 2l),$$

dont le coefficient est égal à $2'',504$. Enfin, parmi les termes du second ordre par rapport aux masses obtenus au n° 16, on trouve le suivant

$$\frac{5}{4} (I) \frac{K}{a^2 \mu} \sin(2l' - 2l),$$

dont le coefficient est égal à $-5'',102$. D'après cela, l'inégalité d'argument $2l' - 2l$ dans la longitude du premier satellite aura pour expression

$$\delta v = -6036'',8 \sin(2l' - 2l).$$

On verra de la même manière qu'il entre dans la longitude du second satellite les termes suivants.

1° Termes en $\sin(l' - l)$:

$$\begin{aligned} & -3 \frac{m}{\mu'} \left(\frac{n'}{n - n'} \right)^2 \left(\frac{1}{2} a' \Lambda^{(1)} - \frac{a'^2}{a^2} \right) & \text{dont la valeur numérique est} & 70'',267, \\ & -\frac{m}{\mu'} \frac{n'}{n - n'} \left(a' \Lambda^{(1)} + a' \Lambda_1^{(1)} + \frac{2a'^2}{a^2} \right) & \text{»} & \text{»} & -75'',753, \\ & \frac{m}{\mu'} \frac{n'}{n} \left(-a' \Lambda^{(1)} + a' \Lambda_1^{(1)} + \frac{3a'^2}{a^2} \right) & \text{»} & \text{»} & 12'',266, \\ & \frac{5}{4} (II) \frac{K}{a'^2 \mu'} & \text{»} & \text{»} & 4'',208. \end{aligned}$$

2° Termes en $\sin(2l'' - 2l')$:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} \frac{m''}{\mu'} \left(\frac{n'}{n'' - n'} \right)^2 a' \Lambda'^{(2)} & \text{dont la valeur numérique est} & 37'',69, \\ & \frac{1}{2} \frac{m''}{\mu'} \frac{n'}{n' - n''} a' \Lambda_1'^{(2)} & \text{»} & \text{»} & 31'',76, \\ & \frac{m''}{\mu'} \frac{n'}{2n'' - 3n'} \left(-4a' \Lambda'^{(2)} + a' \Lambda_1'^{(2)} \right) & \text{»} & \text{»} & 9'',46. \end{aligned}$$

Par suite, l'inégalité d'argument $l' - l$, dans la longitude du second satellite, aura pour expression

$$\delta v' = 12567'' \sin(l' - l).$$

Pour le troisième satellite, on trouvera de même les termes suivants en $\sin(l'' - l')$:

$$\begin{array}{lll}
 -3 \frac{m'}{\mu''} \left(\frac{n''}{n' - n''} \right)^2 \left(\frac{1}{2} a'' A_1^{(1)} - \frac{a''^2}{a'^2} \right) & \text{dont la valeur numérique est} & 379'', 32, \\
 -\frac{m'}{\mu''} \frac{n''}{n' - n''} \left(a'' A_1^{(1)} + a'' A_1^{(1)} + \frac{2a''^2}{a'^2} \right) & \text{»} & -492'', 51, \\
 \frac{m'}{\mu''} \frac{n''}{n'} \left(-a'' A_1^{(1)} + a'' A_1^{(1)} + \frac{3a''^2}{a'^2} \right) & \text{»} & 59'', 18, \\
 \frac{5}{4} (\text{III}) \frac{K}{a''^2 \mu''} & \text{»} & 0'', 1058:
 \end{array}$$

et par suite l'inégalité d'argument $l'' - l'$, qui affecte sa longitude, aura pour expression

$$\delta v'' = 754'', 75 \sin(l'' - l').$$

Au lieu des coefficients

$$-6036'', 8, 12561'' \text{ et } 754'', 75,$$

Laplace donne

$$-5050'', 59, 11920'', 67 \text{ et } 808'', 20;$$

et ces derniers nombres sont ceux dont Delambre a fait usage.



ÉTUDES RELATIVES

A

L'ABSORPTION DE L'AMMONIAQUE

ET A LA

PRODUCTION D'ACIDES GRAS VOLATILS

PENDANT LA FERMENTATION ALCOOLIQUE.

PAR M. E. DUCLAUX,

AGRÉGÉ PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

ABSORPTION DE L'AMMONIAQUE.

Je me propose, dans ce premier travail, de compléter l'histoire du rôle que jouent les matières azotées dans la fermentation alcoolique. Cette question est déjà ancienne. A peine Lavoisier eut-il fixé, dans une vue de génie, le sens général du phénomène de la fermentation, qu'on fut conduit à en approfondir les détails, et à se demander ce que c'était qu'un ferment. Fabroni⁽¹⁾ répondit le premier à cette question, en assimilant vaguement la levûre de bière au gluten. Plus tard, en l'an VIII, l'Institut proposa pour sujet de prix la question suivante : Quels sont les caractères qui distinguent, dans les matières végétales et animales, celles qui servent de ferment de celles auxquelles elles font subir la fermentation ? Thenard essaya d'y répondre. Il confirma les idées de Fabroni, et observa des faits intéressants. D'après lui, la levûre fraîche est azotée. Seulement, l'azote disparaît peu à peu, à mesure que la fermentation se continue ; et si on épuise cette levûre sur un excès de sucre, on trouve que 2 parties de levûre azotée laissent comme résidu 1 partie de matière blanche ayant les propriétés de la cellulose et ne renfermant plus d'azote (2).

(1) Résumé du travail de Fabroni, par Fourcroy, *Annales de Chimie et de Physique*, t. XXXI; 1799.

(2) *Annales de Chimie et de Physique*, t. XLVI, p. 313; 1803.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. Tome II.

Ce dernier fait est inexact : l'erreur tenait aux procédés peu précis employés alors pour mettre l'azote en évidence. Quoi qu'il en soit, cette disparition était singulière, et resta comme un fait inexpliqué dans le travail de Thenard.

Les travaux destinés à écarter cette difficulté ne firent pas défaut. Döbereiner (1) annonça, quelques années après, que le résidu soluble du liquide fermenté renfermait l'azote du ferment à l'état d'ammoniaque. C'était encore une erreur d'expérience : l'ammoniaque observée provenait de la réaction des alcalis, employés pour la découvrir, sur les matières albuminoïdes très-altérables de la liqueur. Mais cette action était alors mal connue, et tous les chimistes acceptèrent les résultats de Döbereiner.

Bientôt après, naquit une théorie qui rendait pour ainsi dire nécessaire cette transformation de l'azote de la levûre en ammoniaque. Si en effet, comme le dit Liebig, la levûre qui produit une fermentation est une matière en voie de putréfaction, dont tous les éléments doivent tendre à se résoudre en leurs groupements les plus simples, l'azote de la levûre ne peut donner autre chose que de l'ammoniaque, dont les résultats de Döbereiner venaient fort à propos démontrer la présence. Ils furent corroborés par un travail de Mulder (2), qui montra que la levûre était formée de deux choses : une enveloppe extérieure, analogue à la cellulose, et une matière intérieure analogue au gluten. Cette dernière était la seule qui, après avoir subi l'action de l'air, fût capable de provoquer le dédoublement du sucre ; elle se détruisait alors, en laissant comme résidu l'enveloppe de cellulose. Un travail subséquent de Schmidt (3) montra que cette destruction avait pour effet de donner de l'ammoniaque, qu'il retrouvait dans le liquide fermenté au moyen du phosphate de magnésie.

Ce dernier résultat, obtenu en dehors de toute production artificielle d'ammoniaque au moyen des alcalis, est difficilement explicable. Mais en l'acceptant comme vrai, il était très-favorable à la théorie de Liebig. Aussi passa-t-il dans la science, et partout on admit la transformation des matières azotées de la levûre en ammoniaque.

Dans ses belles études sur la fermentation alcoolique, M. Pasteur fut amené à s'occuper de ce fait, en opposition avec la manière nouvelle dont il interprétait l'action de la levûre. Il démontra que loin de se produire pendant la fermentation, l'ammoniaque disparaissait, et non-seulement celle qui existait naturellement dans le liquide, mais encore celle qu'on pouvait y ajouter.

Ayant observé d'ailleurs qu'il ne se dégageait pas d'azote à l'état de gaz, il en

(1) *Journal de SCHWEIGGER.*

(2) *Schick. Onderz.*, deel. II, p. 409.

(3) *Annalen der Chemie und Pharmacie*, bd. LXI, p. 168.

conclut que l'ammoniaque formait de la matière albuminoïde par une espèce de copulation avec le sucre. Cette conclusion était importante, on le comprend sans peine; ce travail d'assimilation mis ainsi en évidence dans la levûre était en contradiction avec la théorie de Liebig. En poursuivant cette idée, M. Pasteur fut amené à faire l'expérience capitale suivante :

« Dans une solution de sucre candi pur, je place, dit M. Pasteur, d'une part un sel d'ammoniaque, par exemple du tartrate d'ammoniaque; d'autre part, la matière minérale qui entre dans la composition de la levûre de bière, puis une quantité pour ainsi dire impondérable de globules de levûre frais. Chose remarquable, les globules semés dans ces conditions se développent, se multiplient, et le sucre fermente, tandis que la matière minérale se dissout peu à peu, et que l'ammoniaque disparaît. En d'autres termes, l'ammoniaque se transforme dans la matière albuminoïde complexe qui entre dans la constitution de la levûre, en même temps que les phosphates donnent aux globules nouveaux leurs aliments minéraux. Quant au carbone, il est évidemment fourni par le sucre (1). »

Cette expérience devait mettre fin aux discussions sur la nature de la levûre. Puisqu'il y a fermentation dans ce milieu, composé uniquement de matières minérales, et d'où l'on a systématiquement éloigné tout élément organisé, toute substance appartenant au groupe de ce que l'on appelait alors les ferments, la levûre n'est pas une matière azotée en voie de décomposition, dont le mouvement moléculaire se transmet à la molécule de sucre et la détruit; c'est un organisme vivant, dont le procès vital est accompagné nécessairement de la transformation du sucre, toutes les fois que celui-ci est présent dans la liqueur.

Les conditions dans lesquelles cette expérience était faite semblaient ne devoir pas soulever d'objections. Ce qu'elle présentait de vraiment nouveau était le fait de l'absorption exercée par la levûre, et s'il y avait eu quelques doutes à ce sujet, la réponse était péremptoire : La levûre se développe, elle vit, la quantité d'azote qu'elle renferme augmente, et cet azote doit nécessairement venir de quelque part. Or, on constate facilement la disparition dans la liqueur de l'ammoniaque introduite. Donc, l'azote de la levûre provient de l'ammoniaque absorbée.

M. Millon (2), en répétant ces expériences, observa comme M. Pasteur la disparition de l'ammoniaque; mais il s'attacha à voir si l'acide carbonique dégagé par la fermentation ne l'entraînait pas avec lui. « Cette constatation, dit-il, était de rigueur avant de formuler une conclusion aussi radicalement neuve que celle à laquelle M. Pasteur s'est arrêté. »

Pour cela, M. Millon faisait passer les gaz produits à travers un tube à boules

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. LVIII, p. 383.

(2) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVII, p. 236.

renfermant de l'eau acidulée; l'ammoniaque était retenue, et on la dosait par le chlorure de platine.

M. Millon trouva ainsi que l'acide carbonique entraînait des proportions variables de l'ammoniaque combinée à l'acide tartrique, de 15 à 20 pour 100 dans les cas ordinaires, 80 pour 100 dans les cas où la fermentation était énergique, et où la masse faisait le plus sentir son influence au profit de l'acide le plus faible. « C'est là, dit M. Millon, une des manifestations les plus ordinaires de l'affinité chimique, et il est impossible de découvrir dans ces conditions de fermentation, imaginées par M. Pasteur, rien qui ressemble à une action physiologique ou vitale. »

On le voit, c'était toute une interprétation nouvelle, et quelque singulier qu'il fût de voir l'ammoniaque se dégager ainsi du milieu d'un liquide acide, le nom de M. Millon commandait assez l'attention pour que j'aie cru utile de répéter ses expériences.

J'ai employé le même procédé que lui, c'est-à-dire que j'ai fait passer les gaz de la fermentation à travers un tube à boules renfermant de l'acide sulfurique dilué. S'il se dégage de l'ammoniaque, l'acide la retiendra au passage, et on n'aura qu'à l'y chercher par la méthode de M. Boussingault, bien plus précise que l'emploi du chlorure de platine.

Je rappelle en quelques mots cette méthode. On sait qu'elle consiste à soumettre le liquide ammoniacal à la distillation après l'avoir rendu alcalin soit par la potasse, lorsqu'il n'y a pas à craindre de réaction de cette base puissante sur les matières albuminoïdes, soit dans ce dernier cas par la magnésie. L'ammoniaque contenue distille tout entière dans les premières portions de liquide que l'on recueille seules, et on la dose par les liqueurs titrées. La liqueur acide normale est telle, que 10 centimètres cubes renferment 0^{gr},06125 d'acide sulfurique monohydraté. La liqueur alcaline est de l'eau de chaux. Je l'emploie telle qu'on l'obtient en laissant séjourner pendant huit à dix jours de l'eau distillée sur de la chaux. Il s'en dissout plus ou moins suivant la température, mais les quantités d'eau de chaux nécessaires pour saturer 10 centimètres cubes d'acide normal ne variant guère qu'entre 25 et 30 centimètres cubes, on a à peu près constamment la même précision. Le titre de cette dissolution alcaline, c'est-à-dire la quantité nécessaire pour saturer 10 centimètres cubes d'acide sulfurique normal, était pris avec soin avant chaque opération. Puis on mêlait à 10 centimètres cubes de la même liqueur acide la liqueur ammoniacale distillée, et on cherchait la quantité d'eau de chaux nécessaire pour saturer l'excès d'acide. De la différence entre les deux dosages on pouvait évidemment déduire la quantité d'ammoniaque.

Toutes ces manipulations très-simples en théorie doivent être accompagnées dans la pratique de précautions dont je crois utile de dire un mot. Je les ai

appries pour la plupart à l'excellent cours que M. Boussingault professe au Conservatoire des Arts et Métiers. Beaucoup ne m'appartiennent donc pas, mais le détail de celles que j'ai prises est indispensable pour qu'on puisse juger de la précision dont est susceptible ce genre de recherches, et acquérir confiance dans mes résultats.

La première difficulté est dans la construction de l'appareil distillatoire. Il se compose d'un ballon de 1 litre environ de capacité, fermé par un bouchon muni de deux tubes, l'un droit, servant à l'introduction du liquide; l'autre recourbé, servant au dégagement de la vapeur, et communiquant avec un serpentin. Le ballon a toujours un col assez large, d'où la nécessité d'un gros bouchon, qui doit en même temps être excellent, et d'une homogénéité parfaite. Or, il est difficile de satisfaire à ces deux conditions, et si elles ne sont pas remplies, il arrive que le bouchon se détruit peu à peu à la partie inférieure, s'humecte aux dépens du liquide distillé, et produit ainsi une perte d'autant plus fâcheuse, qu'elle s'exerce sur les premières portions de ce liquide, c'est-à-dire les plus riches en ammoniacale. Pour obvier à cet inconvénient, j'enduis la partie inférieure et les parois du bouchon de caoutchouc fondu, qui forme à la surface un vernis imperméable.

Les autres difficultés sont des difficultés de dosage. La teinture de tournesol dont on se sert est toujours plus ou moins alcaline, et comme on l'introduit dans une liqueur acide, elle peut y remplacer une certaine quantité d'eau de chaux, et produire une erreur de dosage. Pour la neutraliser, M. Boussingault la divise en deux portions, rougit l'une au moyen d'une petite quantité d'acide chlorhydrique, et la reverse dans l'autre. Le tout redevient bleu. Il recommence plusieurs fois l'opération en ajoutant des quantités de plus en plus faibles d'acide, jusqu'à ce que la teinte soit indécise entre le bleu et le rouge. La teinture est alors aussi sensible que possible. Si l'on a en outre la précaution d'en prendre le même nombre de gouttes dans toutes les expériences, l'erreur commise reste constante, s'il y a erreur. Pour l'atténuer encore, je prenais le titre de cette teinture, c'est-à-dire que je cherchais combien de gouttes de cette teinture correspondaient à une goutte d'eau de chaux. Dans la plupart des cas, ce titre était de 5 gouttes. Donc, lorsque, pour colorer la liqueur, je mettais 5 gouttes de teinture, c'est comme si j'avais mis une goutte d'eau de chaux en plus. A l'époque où j'ai fait ce travail, je ne connaissais pas la teinture si sensible préparée par M. de Luynes, mais, avec les précautions précédentes, j'estime m'être mis à l'abri de toutes les causes d'erreur pouvant provenir de là.

Enfin, la difficulté la plus grave tient à la présence de l'acide carbonique dans la liqueur ammoniacale. En présence de cet acide, la teinte ne vire jamais franchement au bleu, et il y a incertitude sur le moment où tout l'acide sulfurique est

saturé. Il serait cependant possible, en prenant beaucoup de précautions, de saisir exactement ce point, ainsi que de nombreuses expériences me l'ont prouvé. Voici en effet ce qui se passe quand on verse de l'eau de chaux dans 10 centimètres cubes d'acide sulfurique titré dans lesquels on a fait passer un courant d'acide carbonique. Au moment précis de la saturation de l'acide, il se produit dans toute la masse du liquide, convenablement agitée, une teinte bleue; mais ce n'est qu'un éclair, car elle redevient rouge vineux presque immédiatement. Dès ce moment, chaque goutte produit le même effet que la précédente, et pour avoir une teinte bleue constante, il faut ajouter des quantités variables de liqueur alcaline.

Mais la délicatesse de ce procédé est évidemment trop grande, et il ne m'a été utile que pour juger de l'exactitude de deux autres procédés que je vais décrire : leur pratique est beaucoup plus commode que celle du précédent, mais je crois qu'ils avaient besoin de lui être comparés.

On peut d'abord extraire l'acide carbonique en faisant le vide au-dessus du liquide; mais, même dans ce cas, les dernières portions persistent très-longtemps. Au bout de trois heures de vide, si l'on essaye le dosage, on voit que le liquide, après avoir bleui, vire de nouveau au rouge. Seulement, moins il y a d'acide carbonique, plus le temps pendant lequel le liquide reste bleu est long. Ce ne serait qu'au bout de huit à dix heures de vide que le bleu serait persistant, mais après trois heures il est assez durable pour qu'on puisse facilement constater le virement de la teinte. Ce procédé est tout aussi exact que le précédent.

Un moyen plus rapide consiste à faire bouillir pendant une minute environ le liquide ammoniacal, après y avoir ajouté 10 centimètres cubes d'acide sulfurique titré. Il faut seulement avoir soin d'incliner le col du ballon où on chauffe, pour éviter les pertes par projection, et faire avec soin les lavages.

Cet inconvénient de la présence de l'acide carbonique n'existe que lorsqu'on a été obligé de traiter à l'appareil de M. Boussingault un liquide ammoniacal par la magnésie. Cette terre ne retient pas l'acide carbonique, comme le ferait la potasse, dont l'emploi, lorsqu'il est possible, supprime cette dernière série de précautions. On peut même, lorsqu'on n'a pas beaucoup de dosages à faire, et qu'on a obtenu par la magnésie un liquide renfermant du carbonate d'ammoniaque, traiter de nouveau ce liquide dans l'appareil par la potasse qui retient complètement l'acide.

Les résultats que j'ai obtenus par ces moyens sont tous contraires à ceux de M. Millon. Je n'ai jamais observé qu'il y eût de dégagement d'ammoniaque avec l'acide carbonique. Il faut dire cependant que dans le cas dont je parle, celui où la fermentation se fait avec une trace de levûre semée dans une liqueur sucrée, la levûre vit péniblement, le dégagement gazeux est toujours très-lent, et dans les plus mauvaises conditions, selon M. Millon, pour entraîner l'ammoniaque. Il m'est

même impossible de comprendre comment en se maintenant dans ces conditions, qui sont celles de l'expérience de M. Pasteur, M. Millon a pu avoir des dégagements gazeux qu'il appelle rapides. Mais il y a un autre moyen de résoudre la question en litige, et je crois d'une façon tout à fait concluante.

Dans le cas que nous venons d'examiner, c'est la présence de l'ammoniaque qui a rendu la fermentation possible. Sans elle, la levûre ne trouvant pas d'aliments à l'intérieur, et en trop faible quantité pour que les matériaux solubles qu'elle abandonne nécessairement à la liqueur puissent servir à nourrir les nouveaux globules, aurait fini par mourir d'épuisement, et la fermentation se serait arrêtée. Mais il suffit d'augmenter les proportions de levûre pour que la fermentation marche comme à l'ordinaire. Dès lors, si nous ajoutons de l'ammoniaque, elle y sera au moins inutile; rien ne l'empêchera donc de se dégager, et en proportions d'autant plus grandes, que le courant gazeux pourra être rendu très-rapide.

Le 28 mars 1864, je dispose dans un flacon de 1 litre muni d'un tube à boules avec 10 centimètres cubes d'acide sulfurique titré :

Sucre candi	100 ^{gr}
Levûre fraîche en pâte	5
Tartrate droit d'ammoniaque	1
Cendres de levûre	traces

La fermentation va bien dès les premiers jours; c'est au printemps; la température de l'étuve est de 26 degrés. Le 20 avril, le dégagement gazeux est devenu très-lent; je retire le tube à boules, et j'y dose l'ammoniaque.

Titre avant	28,6 ^{cc}
» après	28,55
Différence	0,05 = 0 ^{gr} ,00003 d'ammoniaque,

quantité extrêmement minime, pouvant tenir soit aux petites quantités du liquide de fermentation entraînées dans le tube à boules par le courant gazeux, soit à la perte d'une petite quantité du liquide acide enlevée par ce même courant, soit aux causes d'erreur du dosage.

Voyons maintenant ce que l'ammoniaque est devenue. Il suffit de filtrer le liquide, qui ici est en volume de 1040 centimètres cubes, et d'en distiller 100 centimètres cubes sur la magnésie qui chasse l'ammoniaque sans en produire de nouvelle avec les matières albuminoïdes de la liqueur.

Titre avant	27,15 ^{cc}
» après	12,75
Différence	14,40 = 0 ^{gr} ,0114 d'ammoniaque.

Pour les 1040 centimètres cubes, cela ferait 0^{gr},117; or 1 gramme de tartrate en contient 0^{gr},184: il en a donc disparu 0^{gr},067.

On voit donc que l'ammoniaque n'en est pas moins absorbée, quoique la fermentation soit dans d'assez bonnes conditions pour marcher seule.

Cependant, en examinant la levûre au microscope, on voit qu'elle a vécu péniblement; les globules sont ramifiés, flasques, presque vides à l'intérieur. On pourrait donc attribuer l'absorption observée à la difficulté où était la levûre de vivre, et à la nécessité de prendre autour d'elle tous les aliments qu'elle y trouvait. Mais nous allons voir qu'en forçant la proportion de levûre, le sens du phénomène ne change pas.

Le 26 avril 1864, je dépose comme précédemment une fermentation dans les conditions suivantes :

Sucre candi.....	40 ^{gr}
Levûre en pâte (à l'état sec, 2,790).	15
Tartrate droit d'ammoniaque.....	1
Eau.....	650

La levûre employée est très-fraîche et très-belle, surtout très-blanche, ce qui est un excellent indice. Le 27, la fermentation est tout à fait en train; un peu de mousse à la surface, mais très-peu. Le 30 avril, elle devient presque subitement très-lente. Néanmoins, elle continue par un dégagement de petites bulles jusqu'au 5 mai, où elle paraît parfaitement terminée.

Je prends d'abord le titre acide de la dissolution dans les boules :

Titre avant	27,2 ^{cc}
» après	27,15
Différence.....	0,05

Il n'y a donc pas eu entraînement de l'ammoniaque, et pourtant 10 litres d'acide carbonique ont passé en quatre jours.

Le liquide est en volume de 750 centimètres cubes. J'en prends 100 centimètres cubes pour étudier l'ammoniaque.

Titre avant.....	27,1 ^{cc}
» après.....	14,2
Différence.....	12,9

ce qui donne pour tout le liquide 0^{gr},0747 d'ammoniaque. Il en a donc disparu 0^{gr},110.

Quant au poids de la levûre après la fermentation, il est de 2^{gr},500.

Ainsi donc, même dans ce cas, où la présence d'une grande quantité de levûre semblait rendre inutile celle de l'ammoniaque, il n'y en a pas moins eu absorption de cet alcali, et en quantités considérables. Il semble donc y avoir de la part de la levûre pour l'ammoniaque une sorte d'avidité qui fait qu'il est bien difficile d'accepter les résultats de M. Millon.

Je ne crois pas qu'aucune objection bien sérieuse puisse s'élever contre une expérience ainsi conduite. M. Millon a prétendu qu'avec un dégagement gazeux aussi rapide, *une grande partie* de l'ammoniaque a dû échapper à l'absorption dans le tube à boules; mais l'expérience montre que *toute* aurait dû y échapper, et cela est incroyable. Cependant je reconnais que je ne m'étais mis en garde que contre un dégagement d'azote à l'état d'alcali volatil, et non sous une autre forme. Quelle pourrait être cette forme? Je ne sais : il ne se dégage pas d'azote gazeux. Mais quelle qu'elle fût, il en résultait pour mon expérience un postulatum de la nécessité duquel j'ai cru utile de m'affranchir. Il me suffisait pour cela de démontrer la présence dans le liquide, à l'état de matière albuminoïde, de tout l'azote de l'ammoniaque absorbée.

Dans ce but, je disposai la fermentation suivante :

Sucre candi.....	40 ^{gr}
Levûre fraîche (à l'état sec, 2,501)..	15
Tartrate droit d'ammoniaque.....	1
Eau.....	500

La fermentation marche avec une régularité extrême; en sept jours elle est terminée. L'analyse du liquide du tube à boules donne les résultats suivants :

Titre avant	^{gr} 29,2
» après	29,2
Différence.....	0,0

Il ne se dégage donc pas d'azote à l'état d'ammoniaque; mais il y a plus, je dis qu'il est tout entier dans la liqueur.

L'étude de cette liqueur, faite comme à l'ordinaire, montre qu'il y reste 0^{gr},084 d'ammoniaque. Il en a donc disparu 0^{gr},198 renfermant 0^{gr},106 d'azote. Si ces 106 milligrammes ont été réellement assimilés, nous devons les retrouver à l'état de matière azotée, unis à ce qu'a apporté d'azote la levûre fraîche introduite.

0^{gr},366 de celle-ci sont analysés par la chaux sodée. Le tube à boules renferme

10 centimètres cubes de dissolution normale contenant 0^{gr},6125 d'acide sulfurique monohydraté.

Titre avant.....	27,35 ^{cc}
» après.....	22,4
Différence..	<u>4,95</u> = 0 ^{gr} ,0315 d'azote.

La levûre introduite renferme donc $\frac{0,0315 \times 2^{\text{gr}},501}{0,336}$ 0^{gr},215 d'azote.

En somme, le liquide privé d'ammoniaque par la magnésie doit renfermer 0^{gr},106 + 0^{gr},215 = 0^{gr},321 d'azote à l'état de matière azotée, contenue tant dans la levûre que dans la matière albuminoïde dissoute.

Or, la levûre recueillie après la fermentation pèse sèche 2^{gr},326. Je l'analyse comme précédemment.

Poids de la matière soumise à l'analyse : 0^{gr},445.

Titre avant.....	27,35 ^{cc}
» après.....	22,90
Différence..	<u>4,45</u> = 0 ^{gr} ,0282 d'azote.

Il y a donc en tout dans la levûre, après la fermentation, 0^{gr},148 d'azote. La différence entre 0^{gr},321 et 0^{gr},148 ou 0^{gr},173 doit se retrouver dans la matière albuminoïde.

L'étude de celle-ci est difficile; c'est une substance extrêmement hygrométrique, poisseuse, qu'il serait impossible de broyer avec de la chaux sodée. Il faut opérer de la façon suivante : on évapore le liquide de la fermentation avec un excès de magnésie qui chasse l'ammoniaque; vers la fin de l'évaporation, lorsque la matière devient pâteuse, on la malaxe avec une tige fine, de façon à en faire un tout bien homogène que l'on dessèche alors doucement pendant quelques jours. La magnésie se carbonate, et on obtient une sorte de galette très-poreuse, facile à pulvériser, encore un peu hygrométrique, mais dont la pesée est facile.

Le poids de cette matière est de 7^{gr},750. J'en analyse 1^{gr},385.

Titre avant.....	27,35 ^{cc}
» après.....	22,60
Différence..	<u>4,75</u> = 0 ^{gr} ,0304 d'azote.

Cela ferait en tout 0^{gr},170, au lieu de 0^{gr},173. En songeant que dans les deux dernières expériences les erreurs s'ajoutent et qu'elles tendent à donner une perte d'azote, que malgré toutes les précautions on ne peut éviter probablement une légère action de la magnésie sur les matières albuminoïdes pendant la dessiccation,

on conclura, comme je l'ai fait, que la différence entre ces deux nombres est sans importance.

Il n'y a donc pas eu dégagement d'azote, et de plus il y a eu 106 milligrammes de ce corps, existant primitivement à l'état d'ammoniaque, qui ont été assimilés.

La conclusion que M. Pasteur avait tirée de ses expériences est donc exacte, et si j'avais eu seulement pour but de la vérifier, mon travail serait terminé; mais j'ai cru qu'il y avait dans ce fait de l'absorption si facile de l'ammoniaque par la levûre un sujet d'étude intéressant.

Ce qui résulte en effet des expériences précédentes, c'est que la levûre trouve dans l'ammoniaque un excellent aliment qu'elle absorbe non-seulement dans la pénurie d'aliments d'une autre espèce, mais lorsqu'elle est dans les meilleures conditions de vitalité. Un peu de réflexion rendait ce phénomène plus intéressant encore. Lorsque l'on met en effet, comme ci-dessus, beaucoup de levûre en fermentation, une partie de la matière de cette levûre se dissout dans l'eau. C'est probablement à l'aide de ces substances dissoutes que se formeraient les nouveaux globules, s'il n'y avait pas d'ammoniaque. En tout cas, c'est en leur présence que l'absorption d'ammoniaque a lieu. La levûre se nourrirait-elle plus volontiers de l'aliment minéral que de l'aliment déjà organisé?

Cette idée me conduisit à rechercher ce qui se passerait si on mettait en présence de la levûre, à la fois des sels ammoniacaux et des matières azotées bien assimilables, telles que peut les présenter, par exemple, l'eau de levûre.

Pour le savoir, je dispose les trois fermentations suivantes :

I.		II.		III.	
Sucre candi.....	5 ^{gr}	Sucre candi....	5 ^{gr}	Sucre candi....	5 ^{gr}
Levûre fraîche.....	0,5	Levûre fraîche..	0,5	Levûre fraîche..	0,5
Tartrate droit d'ammoniaque.	0,25	Eau de levûre..	175 ^{cc}	Tartrate.....	0,25
Eau.....	175 ^{cc}			Eau de levûre..	175 ^{cc}

Les 0^{gr},5 de levûre fraîche représentaient 0^{gr},104 à l'état sec; les 175 centimètres cubes d'eau de levûre renfermaient 0^{gr},665 de matière sèche.

L'étude de la marche de ces fermentations est très-instructive. S'il n'y avait pas de tartrate, II et III iraient beaucoup plus vite que I; elles seraient terminées en quatre ou cinq jours, tandis que I fermenterait encore au bout d'un mois. Il en est tout autrement dans les conditions actuelles : III est la fermentation qui va le plus rapidement; II, qui renferme les mêmes proportions de matières sauf le tartrate, est plus lente; mais ce qu'il y a de singulier, c'est qu'elle n'est guère plus rapide que I qui cependant ne renferme pas d'eau de levûre. Dans le cas dont je parle, elle a été terminée un jour auparavant; mais dans d'autres cas, la fermentation sans eau de levûre a été la plus rapide.

L'influence du tartrate d'ammoniaque sur la rapidité de la fermentation est donc évidente, et dans ce sel ce n'est pas l'acide tartrique qui agit. Je montrerai en effet plus tard que l'acidité croissante de la liqueur, à mesure que l'ammoniaque est absorbée, nuit beaucoup à la fermentation.

Mais rapprochons les résultats précédents des poids de levûre produits par chacune des fermentations et des quantités d'ammoniaque absorbées. Les voici :

	I.	II.	III.
Poids de levûre, ...	0,171 ^{gr}	0,285 ^{gr}	0,315 ^{gr}
Ammoniaque absorbée, . . .	0,012	»	0,014

Si l'on compare d'abord les poids de levûre, on voit qu'ils sont bien différents pour I et II qui allaient avec la même activité. La présence de l'ammoniaque dans I semble donc augmenter le pouvoir fermentant de la levûre.

Si l'on étudie ensuite l'absorption de l'ammoniaque, on voit qu'elle a été à peu près la même dans I et dans III. La présence des matières albuminoïdes assimilables n'empêche donc pas la levûre d'absorber l'ammoniaque et de lui emprunter l'azote qu'autrement elle eût emprunté aux matières de l'eau de levûre, ainsi que cela a eu lieu dans II.

Cette expérience me paraît donc mettre en évidence une véritable influence de la nourriture ammoniacale de la levûre sur ses propriétés. Elle semble alors plus active, plus vivante, plus capable sous un faible poids de faire fermenter le sucre. Tandis que dans la fermentation avec eau de levûre, elle semble surtout se reproduire, augmenter de poids, dans la fermentation avec tartrate, elle gagne au contraire du côté de la rapidité d'action, et il semble que l'aliment ammoniacal, moins propre au développement de la levûre *végétal*, convient beaucoup mieux à la levûre *ferment*.

Ces faits ne paraîtront pas sans importance, lorsqu'on songera que la levûre est une véritable cellule vivante, et que les phénomènes dont elle est le siège paraissent devoir devenir d'un haut intérêt pour la physiologie. Il est impossible, en étudiant les fonctions du globule de levûre, de méconnaître l'analogie qu'elles présentent avec celles de certains organes végétaux et animaux. Nous trouverons du reste, dans la deuxième partie de ce travail, l'occasion de nouveaux points de rapprochement.

Quoi qu'il en soit, ces études conduisaient à une conséquence : c'est que, dans toutes les fermentations s'accomplissant en présence des sels d'ammoniaque, il devait y avoir absorption de cette base.

Il était possible que le jus de raisin fût dans ces conditions. Je recherchai donc s'il contenait des sels ammoniacaux. Leur existence y était probable; du moins

Liebig l'avait démontrée depuis longtemps pour les jus sucrés aussi de l'érable, du bouleau, de la betterave; mais il n'avait pas parlé du jus du raisin. Mulder (1) ne même formellement qu'il y ait de l'ammoniaque dans ce jus. Il en trouve cependant, comme Berthollet l'avait fait déjà, dans le vin; c'était une confirmation de sa théorie de la fermentation, qui reposait, comme nous l'avons vu, sur la décomposition de la matière azotée du ferment.

Je vais montrer que c'est à peu près l'inverse qui est vrai, qu'il y a toujours de l'ammoniaque dans le moût, et presque jamais dans le vin. Mes observations ont été faites sur des moûts provenant du vignoble d'Arbois (Jura). J'ai eu de plus la bonne fortune de pouvoir étudier les vins provenant de ces moûts, et de pouvoir ainsi comparer les résultats des fermentations en grand avec ceux des essais en petit que je faisais au laboratoire.

Le premier moût que j'ai étudié est celui d'un raisin connu dans le Jura sous le nom d'*enfariné*. Ce moût avait été conservé depuis le mois de septembre au 2 novembre, muté avec de l'acide sulfureux. Ce jour-là j'en mélange 100 centimètres cubes avec 4 grammes de magnésie et 200 d'eau distillée privée d'ammoniaque, puis je distille dans l'appareil de M. Boussingault en faisant trois prises de 50 centimètres cubes chacune. J'obtiens les résultats suivants :

Première prise.		Deuxième prise.		Troisième prise.	
Titre avant.....	28 ^{cc} ,65	Titre avant.....	28 ^{cc} ,65	Titre avant.....	28 ^{cc} ,65
» après.....	13,1	» après.....	27,95	» après....	28,65
Différence..	15,55	Différence..	0,70	Différence..	0,00

Cela faisait en tout 0^{gr},01201 d'ammoniaque, ou 0^{gr},1201 par litre de moût.

Je l'avoue, je fus d'abord surpris de ce résultat; il me semblait impossible qu'une aussi forte proportion d'ammoniaque n'eût pas fixé l'attention, et je me demandai si par hasard je ne la produisais pas pendant l'opération. Cela n'était pas probable, mais était possible, et il pouvait y avoir dans le moût de raisin des matières azotées si facilement altérables, que la magnésie, sans action sur les autres, donnât avec elles de l'ammoniaque, surtout à l'ébullition.

Je crus donc utile de m'affranchir de l'obligation de faire bouillir avec la magnésie le liquide étudié. Je pouvais me servir pour cela d'un appareil imaginé par M. Boussingault pour doser l'ammoniaque dans l'urine, avec lequel on n'a besoin de chauffer qu'à 40 degrés; mais je l'ai trouvé d'un maniement peu commode. L'appareil imaginé par M. Schlœsing pour l'analyse de l'ammoniaque dans le tabac ne m'a pas mieux réussi : l'absorption totale des faibles quantités d'alcali contenues dans mes liquides n'y est complète qu'au bout d'un très-long temps; mais en le

(1) *Die Chemie des Weines*, traduction allemande, p. 289.

modifiant un peu, tout en conservant son principe, j'ai construit un appareil d'un usage commode que je vais décrire en quelques mots (*Pl. II, fig. 1*).

A est une cloche à platine mobile construite par M. Golaz sur les indications de M. Pasteur. On peut y faire le vide par *a*, intercepter ensuite au moyen du bouchon à vis *b* toute communication avec l'extérieur. L'appareil, lorsqu'il est bien construit, garde presque indéfiniment le vide.

Sous cette cloche, je disposais un cristalliseur *c* au fond duquel j'avais collé un disque de verre épais. Autour de celui-ci je versais le liquide à essayer, en prenant soin qu'il ne recouvrit pas le disque. Puis, sur ce disque lui-même, je mettais une boule de magnésie obtenue en humectant un peu cette terre et en la roulant rapidement entre les doigts. Au-dessus était un cristalliseur *d* renfermant 10 centimètres cubes d'acide sulfurique Peligot.

On comprend la manière d'opérer. Tout étant disposé comme je viens de l'indiquer, on fait le vide, et on sépare cet appareil de la machine pneumatique. En inclinant alors un peu la platine, on fait rouler la boule de magnésie dans le liquide. Elle s'y délite rapidement. On l'aide, si c'est nécessaire, par quelques secousses ménagées. L'ammoniaque se dégageant dans le vide, et alors seulement que le vide est fait, s'absorbe dans l'acide sulfurique. Au bout d'un temps variable, de deux à trois jours si on opère avec de l'acide un peu concentré, d'une quinzaine dans les conditions où je fais l'expérience, l'absorption est complète. Ce délai est d'ailleurs sans importance, car, une fois l'appareil installé, il n'y a plus à s'occuper de lui.

Voici les résultats d'une expérience faite sur le moût d'*enfariné*.

Le 16 novembre, j'étudie de nouveau le moût ci-dessus, dans lequel la fermentation a commencé, mais où elle est très-lente à cause du froid. J'en distille 50 centimètres cubes sur de la magnésie.

Titre avant.....	27,65 ^{cc}	
» après.....	20,25	
Différence..	7,40	= 0,00566 d'ammoniaque.

50 centimètres cubes du même moût sont traités dans l'appareil décrit plus haut.

Titre avant	27,65 ^{cc}	
» après.....	20,20	
Différence..	7,45	= 0,00570 d'ammoniaque.

L'ammoniaque est donc réellement contenue dans le moût, et dès lors elle doit disparaître pendant la fermentation.

J'essaye en effet le vin provenant de ce moût. 50 centimètres cubes sont distillés sur de la magnésie.

Titre avant	28,5 ^{cc}
» après	28,45
Différence	0,05

ce qui fait une quantité inappréciable d'ammoniaque.

J'ai fait un grand nombre d'essais de cette nature. Je vais les résumer dans un tableau. Je donnerai en même temps la quantité de sucre et d'ammoniaque par litre de moût, la quantité d'ammoniaque par litre de moût fermenté au laboratoire, et par litre de vin naturel. J'ai tenu à présenter ces deux dernières séries de résultats. Si je n'avais en effet étudié que les vins, on aurait pu se demander si le fait de la disparition de l'ammoniaque ne tenait pas à une insolubilité possible du bitartrate d'ammoniaque dans le liquide fermenté.

Les dénominations des raisins sont celles qui sont connues dans le Jura. Tous sont des raisins noirs, sauf le *nature* qui est blanc.

NOMS DES MOÛTS.	SUCRE.	AMMONIAQUE dans 1 litre de moût.	AMMONIAQUE dans 1 litre de vin.	AMMONIAQUE dans 1 litre de moût fermenté.
Enfariné.....	»	gr 0,1201	»	0,0005
Ploussard pur	223,2	0,0080	»	»
Ploussard avec quelques naturels.	220,0	0,0402	0,0017	0,0023
	228,0	0,0390		
Ploussard	188,8	0,0088	0,0020	»
Trousseau	239,4	0,0402	0,005	0,0000
Nature	222,2	0,0712	»	0,0014
Pinot	247,5	0,0721	0,0000	»
Valet noir. I (*).....	144,0	0,0208	0,0052	»
Id. II (**)	207,4	0,0315	»	»
Tous plants. I	200,0	0,0521	0,0011	»
Id. II.....	207,4	0,0613		
Id. III.....	188,8	0,0792	0,0007	»
Id. IV.....	187,6	0,0643		
Id. V.....	208,0	0,0326	0,0011	»
Id. VI.....	206,0	0,0754	0,0008	»

(*) Le vin étudié ne provenait pas exclusivement de ce moût. Il y avait en mélange de jus de trousseaux.
(**) La fermentation était déjà commencée dans ce moût lorsque je l'ai examiné.

On voit que la quantité d'ammoniaque est très-variable d'un moût à un autre :

l'enfariné est celui qui en renferme le plus, le ploussard celui qui en renferme le moins.

Mais ce qu'il y a de général, c'est la disparition de l'ammoniaque pendant la fermentation. Toutefois, il est quelques cas dans lesquels il en reste encore une quantité très-sensible. Que faut-il en conclure ? Est-ce que dans ces vins la levûre aurait trouvé une matière azotée plus facilement assimilable ? La suite de cette étude répondra à la question.

Il était intéressant de voir si on retrouverait pour le vin le phénomène observé pour l'eau de levûre, et si en ajoutant de l'ammoniaque au moût l'absorption aurait tout de même lieu. Le phénomène devait même être ici plus concluant que précédemment. Il est évident en effet que si l'absorption avait encore lieu, la levûre emprunterait à l'ammoniaque de l'azote qu'en son absence elle eût demandé aux matières albuminoïdes, pourtant si facilement assimilables, de la liqueur.

Voici les résultats auxquels je suis arrivé en disposant pour chaque moût deux fermentations parallèles, l'une avec du moût naturel, l'autre avec du moût additionné de proportions variables de tartrate.

Les nombres inscrits au tableau suivant sont les poids d'ammoniaque par litre.

NOMS DES MOÛTS.	SANS TARTRATE D'AMMONIAQUE.		AVEC TARTRATE D'AMMONIAQUE.	
	Avant la fermentation.	Après la fermentation.	Avant la fermentation.	Après la fermentation.
Ploussard.....	0,0402	0,0023	0,224	0,092
Naturé.....	0,0712	0,0014	0,163	0,102
Ploussard.....	0,0334	0,0004	0,327	0,131
Tous plants.....	0,0792	0,0014	0,285	0,163
Valet noir.....	0,0315	0,0005	0,256	0,047

On voit que l'absorption, dans le cas où il y a du tartrate, est considérable, et que si la levûre s'arrête quelquefois dans l'assimilation de l'ammoniaque, comme par exemple dans le cas du ploussard du tableau précédent, ce n'était pas parce qu'elle avait trouvé dans le liquide une matière plus facilement assimilable, car cette matière eût aussi été présente dans le moût avec tartrate, et y aurait dû produire les mêmes effets.

L'étude de ces fermentations de moût avec tartrate est très-intéressante, et je crois devoir m'y arrêter quelque temps.

Lorsqu'on dispose deux fermentations parallèles, avec les mêmes poids de sucre candi et de levûre, et que l'on met en outre, dans l'une d'elles, du tartrate d'am-

moniaque, toujours, sans exception, cette dernière est plus rapide que l'autre. Or, dans le cas du moût avec tartrate, on ne retrouve plus ce résultat. Sa fermentation est, au commencement, plus rapide que celle du moût sans tartrate; mais elle ne tarde pas à se ralentir, et l'autre, plus régulière, est plus tôt terminée. Ce fait est dû à la plus grande acidité que prend la liqueur dans l'un des cas, par suite de l'absorption de l'ammoniaque. Je me suis assuré en effet que la levûre restait inactive, dès le commencement d'une fermentation, si on la mettait en présence de la quantité d'acide tartrique qu'elle aurait développée dans la liqueur en absorbant l'ammoniaque du tartrate ajouté. Mais il suffit de diminuer cette acidité pour retomber immédiatement sur les phénomènes observés pour la fermentation de sucre candi.

Par exemple, le 16 avril 1865, je prends 500 centimètres cubes d'un moût de valet noir, dont 10 centimètres cubes exigent $25^{\text{cc}},5$ eau de chaux (du titre 26,9) pour leur saturation. Puis je sature environ les $\frac{2}{3}$ de l'acide libre en ajoutant $3^{\text{cc}},75$ d'une dissolution de potasse, dont $0^{\text{cc}},0115$ saturent $0^{\text{gr}},06125$ d'acide sulfurique monohydraté, et j'abandonne le moût à lui-même. Dès le 19 il est un peu trouble : je le divise alors en deux portions de 250 centimètres cubes; dans l'une, j'ajoute $0^{\text{gr}},3$ de tartrate d'ammoniaque, et je les place toutes deux à l'étuve.

La fermentation du moût à tartrate est terminée le 26 avril; elle a par conséquent duré six jours. L'autre est terminée seulement le 6 mai. La température a été constamment d'environ 28 degrés.

C'est donc dans ce cas l'acidité seule qui empêche d'observer l'action accélératrice du tartrate d'ammoniaque. Mais poursuivons l'étude de ces deux fermentations.

Le poids de la levûre restant après la fermentation dans le flacon à tartrate est de $0^{\text{gr}},174$. Or, si l'on étudie l'absorption d'ammoniaque, on trouve qu'il en a été assimilé $0^{\text{gr}},0525$ renfermant $0^{\text{gr}},0432$ d'azote. Si tout cet azote s'était fixé sur la levûre restante, celle-ci devrait en renfermer $\frac{4,32}{0,174} = 24$ pour 100. Or, il n'y a pas de levûre qui en renferme autant.

Qu'est donc devenu cet azote? Il est bien évidemment contenu dans le liquide à l'état de matière albuminoïde, éliminée par l'action vitale de la levûre, et comme le poids d'azote contenu dans cette matière albuminoïde est beaucoup plus grand que le poids qui en reste dans la levûre, il est bien évident qu'il a dû y avoir à un moment donné dans le liquide, ou s'y être formé successivement, un poids de levûre bien supérieur à $0^{\text{gr}},174$. En d'autres termes, la fermentation rapide produite dans ce liquide peu acide a probablement été accompagnée d'une destruction rapide aussi de la levûre. Ce qui en reste après la fermentation est la différence entre les résultats de la recomposition et de la destruction de cet élément organisé.

Je vais montrer que cette interprétation est exacte, et que le poids de levûre

restant après la fermentation ne peut rien apprendre sur la quantité de ce corps réellement entrée en action.

Si l'on interrompt à un moment quelconque une fermentation avec sucre candi et tartrate, le poids de levûre qu'on y trouve est supérieur à celui d'une fermentation identique examinée au moment où tout dégagement gazeux a cessé.

Voici une des nombreuses expériences qui le prouvent.

Le 19 mars, j'installe deux fermentations dans les conditions suivantes :

Sucre candi.....	5 ^{gr}
Levûre fraîche (à l'état sec, 0 ^{gr} ,104)..<	0,5
Tartrate droit d'ammoniaque.....	0,25
Eau.....	175 ^{cc}

Le 22, je filtre l'une. Le poids de la levûre est de 0^{gr},171. Il reste 1^{gr},322 de sucre.

Le 9 avril, je filtre l'autre. Le poids de la levûre est de 0^{gr},110. Il ne reste plus de sucre.

Il n'est donc pas étonnant que dans le cas du moût que nous étudions la levûre ait pu assimiler 0^{gr},0474 d'azote. Son poids a dû être bien supérieur à 0^{gr},174. S'il restait du doute sur cette conclusion, l'expérience suivante achèverait de le lever.

Dans le cas précédent, la destruction rapide de la levûre s'est montrée corrélative d'une fermentation rapide. La destruction sera lente si la fermentation est lente, et le poids de levûre agissant dans ce dernier cas sera plus grand que dans le premier. Or, c'est là une conséquence singulière que l'expérience vérifie de tous points. Nous en trouverons la preuve dans la deuxième partie de ce travail. En attendant, voici le résultat d'une étude faite, il est vrai, sur deux moûts de provenances différentes, mais qui n'en est pas moins très-concluante. Ces deux moûts sont : l'un du moût de ploussard où l'excès d'acide n'avait pas été saturé; l'autre le moût de valet noir saturé en partie dont j'ai parlé tout à l'heure.

Moûts.	Tartrate.	Poids de la levûre.	Durée de la fermentation.
1 litre de ploussard . . .	1 ^{gr}	1 ^{gr} ,965	2 $\frac{1}{2}$ mois.
1 litre de valet noir. . .	1,2	0,696	6 jours.

Je crois donc qu'on ne peut pas se refuser à accepter la conclusion à laquelle je suis arrivé. La fermentation rapide est corrélative d'une destruction rapide de la levûre, et le poids de celle-ci restant après la fermentation ne peut rien apprendre sur la quantité absolue qui est intervenue dans le phénomène.

Ces faits sont importants : nous allons les retrouver dans la deuxième partie de

ce travail, où j'espère démontrer que c'est précisément dans ce mouvement de décomposition et de recomposition incessante que la levûre produit l'acide acétique que l'on trouve dans toutes les liqueurs fermentées, et qui provient ainsi non du sucre, mais de la levûre.

Avant de quitter ce sujet, je dirai quelques mots d'une série de recherches, basées sur les résultats précédents, et douées, je crois, de quelque avenir.

Le facile développement de la levûre, lorsqu'on ne lui fournit comme aliment que du sucre, des sels minéraux et ammoniacaux, m'avait fait penser à chercher à quel état la levûre pouvait exister dans l'air : y est-elle sous forme de globules tout formés, n'ayant besoin que de tomber dans un liquide approprié pour y germer ? y est-elle à un autre état, dans lequel elle aurait besoin de subir une élaboration particulière avant de devenir globule ferment ? en deux mots, y est-elle sous forme de germe, ou d'être vivant ?

Pour résoudre ces questions, on conçoit qu'il fallait recueillir cette levûre de l'air dans un liquide tout à fait privé de matières albuminoïdes. Il était essentiel d'éviter toute objection relative à la transformation de ces matières en globules de ferment. En partant des faits précédents, cela était facile : il suffisait de prendre une des liqueurs fermentescibles étudiées. Je me suis servi d'ordinaire du liquide suivant :

Sucre candi.....	10 ^{gr}
Bitartrate d'ammoniaque.....	1
Cendres de levûre.....	0,1
Phosphate d'ammoniaque.....	0,1
Eau.....	500 ^{cc}

L'emploi du bitartrate, sel acide, a pour effet d'empêcher le développement des infusoires les plus petits, qui se multiplient partout avec une rapidité singulière. Une légère acidité de la liqueur prévient toutes ces formations, comme M. Pasteur l'a montré dans ses belles recherches sur les générations spontanées.

Je m'assurai, en semant de la levûre fraîche dans ce liquide, qu'elle s'y développait parfaitement; ce liquide était d'ailleurs propre à nourrir toutes les espèces inférieures de mucédinées, auxquelles, dès lors, pouvaient s'étendre mes expériences.

Une fois cela fait, la méthode consistait à recueillir les globules en suspension dans l'air, et à mettre chacun d'eux dans les conditions de son développement ordinaire, tout en le gardant constamment à sa disposition pour étudier sous le microscope ses états successifs.

Il m'était facile de retrouver sous le microscope, quand je le voudrais, un globule déterminé placé dans le liquide nourricier. Je pouvais me servir pour cela

d'une platine mobile, imaginée autrefois par M. Pasteur pour ces mêmes expériences, et qui présentait la disposition suivante.

Cette platine (*fig. 2*) était formée de deux parties. L'inférieure (*a*) pouvait, au moyen de deux vis, se fixer sur le microscope. La partie supérieure (*b*) était mobile dans une rainure et pouvait glisser dans une direction. Un vernier au $\frac{1}{100}$ de millimètre mesurait ses mouvements. Elle portait elle-même une rainure où glissait un curseur (*c*), dont le mouvement était rectangulaire sur le précédent et mesuré avec la même précision que lui. Sur cette dernière plaque, on dispose la lame de verre portant les spores, et à l'aide des deux mouvements on présente successivement tous ses points au microscope. Chaque fois que l'on aperçoit un globule paraissant organisé, on le dessine et on en prend la position sur les verniers. Il suffira évidemment alors de remettre ceux-ci dans la même situation pour le retrouver, s'il n'a pas changé de place.

Cette dernière condition était difficile à remplir, parce qu'il fallait qu'en même temps le globule eût toutes facilités de se développer. On ne pouvait pas, par exemple, l'enfermer dans une cellule close; l'air eût bientôt manqué. Voici la disposition que j'ai adoptée.

Sur une lame de verre, je construis une petite cuve de brai formée de trois parties (*fig. 3*). Les deux extrêmes *a* et *c* sont séparées de la cuve centrale par deux cloisons formées de brins de coton dont les extrémités sont pétries dans le brai, ce qui leur donne beaucoup de solidité. C'est dans la cuve centrale que je dispose les poussières de l'air, en suspension dans le liquide nourricier, et recouvertes par un verre mince.

Voici à quoi étaient destinées les deux cuves *a* et *c*. Pendant l'observation sous le microscope, l'évaporation du liquide intérieur se faisant à travers les cloisons de coton eût produit des dérangements continuels dans les globules. On évitait cet inconvénient en maintenant constamment pleines de ce liquide les deux cuves *a* et *c*. Puis, dans l'intervalle des observations, la lame de verre était immergée dans une soucoupe contenant du liquide nourricier. La communication entre *b* et l'extérieur était alors facile au moyen des cloisons de coton; la portion de liquide renfermée dans *b* se trouvait alors dans les mêmes conditions qu'une portion quelconque du liquide extérieur. On pouvait d'ailleurs, en lavant entre deux opérations la cuve par un séjour dans l'eau distillée, soumettre les globules renfermés, sans les déranger, à l'action de divers liquides.

Cela posé, voici le procédé opératoire. Je recueille les spores de l'air en le filtrant sur du coton ordinaire, au moyen de l'aspirateur employé par M. Pasteur. La bourre de coton est malaxée dans 5 centimètres cubes du liquide nourricier, préparé au moment même. On porte alors une goutte de ce liquide dans la cuve *b*, et on l'explore au microscope en notant la position des globules qu'on rencontre.

Malheureusement, ces études ne m'ont rien donné de concluant relativement à la levûre de bière; mais le procédé est excellent si l'on veut étudier la germination des spores de mucédinées. Dans celles-ci, en effet, le mycélium est tout à fait distinct du globule mère. Rien n'est curieux comme de suivre les progrès de ces tubes ramifiés dont on suit le développement après les avoir vus naître d'un globule que l'on venait de recueillir dans l'air atmosphérique. On voit, sur les dessins que je donne à la fin de ce Mémoire, quelles différences ils présentent quelquefois à un jour de distance. Les uns s'arrêtent brusquement après avoir seulement commencé à vivre : tels sont ceux des *fig.* 5, 6 et 7; les autres (*fig.* 4) se développent de plus en plus, et envahiraient toute la cuve s'ils n'étaient pas gênés par la multiplication indéfinie des globules de levûre.

Toutes ces espèces, difficiles à définir à cause de l'absence de fructification, sont cependant, comme on le voit, bien différentes entre elles. Les *fig.* 4, 5, 6, 7 et 8 ont été prises dans une même cuve. Il n'y a eu que ces cinq germinations sur quarante et un corpuscules dont j'avais noté la présence. Il ne faut pas s'étonner de cela. Quelques-uns de ces corpuscules peuvent être inféconds. D'ailleurs, le liquide employé ne peut nourrir à l'air libre qu'un nombre limité de productions.

Parmi celles que j'ai obtenues, celle de la *fig.* 8 mérite l'attention. Il y a évidemment eu fructification. Les spores s'étaient même répandues dans le liquide et commençaient à germer comme le représente la figure, lorsque la levûre est venue gêner leur développement ultérieur.

Je ferai remarquer que ce procédé s'applique à l'étude du développement des œufs d'infusoires. Il suffit, pour empêcher ceux-ci une fois nés de voyager dans le liquide, d'introduire dans la cuve *b* une petite rondelle de batiste fine qui retient les infusoires entre ses mailles. J'étais arrivé, par ce procédé, à des résultats analogues à ceux que M. Coste a obtenus depuis en étudiant la poussière de foin. J'ai pu, par exemple, suivre la transformation complète d'un kelpode que j'ai vu successivement s'enkyster, se diviser en deux, puis en quatre portions, et constituer ainsi quatre infusoires distincts. J'ai l'intention de reprendre cette étude, dont j'avais communiqué les premiers résultats à M. Pasteur, et que j'aurais continuée si les belles observations de M. Coste n'étaient venues lui enlever un peu de sa raison d'être.

DE L'ORIGINE DE L'ACIDE ACÉTIQUE PRODUIT PENDANT LA FERMENTATION ALCOOLIQUE.

Lorsqu'on évapore un liquide fermenté que l'on a abandonné à lui-même sans prendre de grandes précautions pour empêcher l'accès de l'air, on observe constamment la présence de l'acide acétique. Cet acide peut provenir de deux causes bien différentes : 1° de l'action oxydante exercée sur l'alcool par le *mycoderma aceti*, si l'air a été en contact avec le liquide; 2° dans tous les cas, de la fermentation elle-même.

La première cause est accidentelle, la seconde seule est normale. L'acide qui en provient est le seul qui puisse être compté comme un terme constant de la fermentation alcoolique. Il serait bien difficile de dire qui lui a reconnu le premier d'une manière nette ce caractère.

Lavoisier trouve cet acide parmi les produits d'une fermentation alcoolique. La quantité qu'il en obtient est si considérable (2,5 pour 100 du poids du sucre), qu'il n'est pas possible d'admettre que la plus grande partie n'ait été produite par oxydation. Lavoisier, d'ailleurs, n'établissant jamais son équation fondamentale qu'entre le sucre d'un côté, l'acide carbonique et l'alcool de l'autre, on peut croire qu'il ne se faisait pas illusion sur l'origine de l'acide acétique qu'il avait observé.

Il ne faudrait pas penser, en effet, qu'à l'époque de Lavoisier on n'eût pas déjà sérieusement réfléchi à cette production de l'acide acétique pendant la fermentation alcoolique. Voici en effet ce que dit Berthollet dans un passage de sa *Statique chimique* :

« L'oxygène qui s'absorbe pendant la fermentation acétique, selon l'observation de Rosier, peut servir à décomposer la combinaison vineuse, ou bien il entre immédiatement dans la constitution de l'acide acétique. Mais à en juger par l'altération du vin qu'on laisse en contact avec l'air, il produit beaucoup plus le premier effet que le second. Cependant la formation de l'acide acétique n'est pas toujours due à ces deux causes; il s'en forme pendant la fermentation vineuse du sucre et de la levûre, même sans communication avec l'air : il est vrai qu'alors il peut être dû à la portion d'amidon que contient toujours la levûre; c'est un objet qui reste à éclaircir (1). »

(1) *Statique chimique*, p. 525.

M. Béchamp (1) est le premier qui ait énoncé d'une manière formelle ce fait, que l'acide acétique était un terme constant de la fermentation alcoolique, et que ce n'était pas le seul acide gras qui prit naissance. Il en a en effet trouvé dans le vin jeune, dans les fermentations accomplies à l'abri de l'air. En opérant sur une grande échelle, il a même pu préparer 65 grammes d'une combinaison de soude avec ces acides gras, qu'il a démontrés être surtout de l'acide acétique.

Mais d'où viennent ces acides? M. Béchamp n'a pas remarqué qu'ils pouvaient avoir deux origines très-distinctes, et qu'ils pouvaient provenir soit du sucre, soit de la levûre.

Lorsque, dans une fermentation alcoolique, on voit un poids déterminé de sucre être transformé en alcool par un poids de levûre cent et mille fois plus petit, il est bien difficile de croire que ce sucre a fait, à une époque quelconque, partie des matériaux de la levûre, et qu'il est quelque chose comme un produit d'excrétion. De même pour l'acide succinique et la glycérine. Les poids de ces deux corps produits pendant la fermentation alcoolique peuvent être rendus plus grands que le poids de levûre agissante, et c'est d'une expérience faite dans ces conditions que M. Pasteur a conclu que la glycérine et l'acide succinique provenaient directement du sucre, non de la levûre, au même titre que l'alcool. Il n'en est pas moins vrai cependant que la levûre vit pendant la fermentation, qu'il se développe des globules nouveaux pendant que les anciens meurent; j'ai même montré, à la fin du Mémoire précédent, que ce travail de rénovation des tissus était dans certains cas d'une énergie extrême. Il y a donc assimilation et désassimilation. Pour la première, M. Pasteur a montré qu'en dehors du grand mouvement qui transforme le sucre en alcool, il y avait un mouvement vital portant sur les globules nouveaux une partie de la substance du sucre. Je viens essayer de démontrer que les acides gras volatils sont des produits de désassimilation, d'excrétion, et qu'ils doivent être dits provenir de la levûre, non du sucre.

Ces acides, comme l'a montré M. Béchamp, sont surtout de l'acide acétique; je m'en suis assuré moi-même, lorsque j'ai pu m'en procurer en quantité suffisante. Ainsi, dans une opération, je recueille un sel de chaux que je purifie par deux ou trois cristallisations successives, en ne prenant à chaque fois que la partie la plus immédiatement soluble dans l'alcool.

Le dernier produit obtenu était cristallisé en aiguilles. Traité par l'acide sulfurique, il dégagait une vive odeur d'acide acétique. 0^{gr},415 de ce sel desséché à 120 degrés ont fourni 0^{gr},142 de chaux, ce qui fait 34,19 pour 100 de chaux, au lieu de 34,57 qu'exigerait la formule de l'acétate. Aussi, dans ce travail, dirai-je indifféremment acide acétique ou acides gras.

(1) *Comptes rendus*, 18 mai 1863.

Il fallait maintenant trouver un procédé de dosage. Il n'y en a pas de précis et d'applicable aux faibles quantités d'acide que j'avais à étudier. La distillation pouvait en devenir un, mais il n'y avait rien de bien connu sur la manière dont cet acide y passe. Je fus donc conduit à faire quelques essais.

Ils étaient faciles. Il suffisait de distiller un liquide contenant des proportions connues d'acide acétique, et de voir ce que l'on en recueillait par la distillation. Je dosais l'acide par l'eau de chaux. Je ne crois pas que ce moyen mérite les critiques que lui a adressées M. Mohr dans son ouvrage sur les liqueurs titrées. Il est vrai que l'acétate de chaux, étant alcalin, fait tourner au violet la teinture de tournesol, lorsqu'il est en quantité assez grande dans une liqueur acide; mais si l'on ajoute une goutte d'eau de chaux en excès, le virage de la teinte du violet au bleu franc est si net, que le procédé peut passer pour bon.

J'opérais d'ordinaire sur une liqueur acide telle, que 10 centimètres cubes exigeaient pour être saturés 23^{cc},9 d'eau de chaux, dont 26^{cc},9 saturent 0^{gr},06:25 d'acide sulfurique monohydraté (1). 110 centimètres cubes de cette liqueur sont distillés à siccité dans une cornue. Le produit n'exige que 250 centimètres cubes de la même eau de chaux. Si tout l'acide avait passé, il en faudrait 263^{cc},0.

Tout l'acide n'est donc pas passé. Il en reste en effet une couche sur les parois de la cornue. J'ajoute 20 centimètres cubes d'eau, et je distille de nouveau. Je lave ainsi les parois, et le liquide qui passe exige 13^{cc},7 d'eau de chaux, qui, ajoutés aux 250 centimètres cubes obtenus déjà, font 263,7 au lieu de 263,0. On a donc obtenu tout l'acide acétique.

Malheureusement, la distillation sèche était impraticable dans les conditions de mes expériences, avec des liquides tenant en dissolution des matières albuminoïdes très-altérables. Je pensai alors à ne distiller qu'une fraction déterminée du liquide à étudier. Je ne devais ainsi recueillir, d'après l'essai précédent, qu'une portion de l'acide, mais il était probable que cette portion serait d'autant plus grande, qu'il y aurait plus d'acide dans la liqueur.

Quelques essais préliminaires m'ayant montré que le terme de $\frac{10}{11}$ dans une distillation pouvait toujours être atteint sans danger, même pour des liquides très-chargés de matière albuminoïde, j'ai pour cette raison, et pour d'autres que je dirai plus tard, pris l'habitude de placer dans une cornue 110 centimètres cubes, et d'en distiller 100. Afin de pouvoir étudier la marche de l'opération, je fractionnais ces 100 centimètres cubes en dix portions de 10 centimètres cubes chacune, que je dosais à part au moyen de l'eau de chaux.

Le tableau suivant renferme le résumé des essais que j'ai faits dans ces conditions. La première colonne contient les résultats obtenus avec 110 centimètres

(1) Je dirai dorénavant *eau de* 26,9.

cubes de la liqueur dont j'ai parlé ci-dessus. Puis on a pris 10, 20, 30, 40 centimètres cubes de cette liqueur que l'on a étendus à 110 et distillés. On a ainsi obtenu les nombres des quatre colonnes suivantes. La première série des nombres de chaque colonne représente les quantités d'eau de chaux nécessaires pour saturer l'acide passé dans chaque portion de 10 centimètres cubes; la deuxième série, la proportion d'acide passé dans toutes les portions recueillies jusque-là. La dernière colonne donne les moyennes de ces proportions.

	110 ^{cc} .		10 ^{cc} .		20 ^{cc} .		30 ^{cc} .		40 ^{cc} .		MOYENNE.
	cc	Pour 100.	cc	Pour 100.	cc	Pour 100.	cc	Pour 100.	cc	Pour 100.	
1	14,6	5,5	1,35	5,6	2,6	5,5	4,3	6,0	5,15	5,4	5,6
2	16,5	11,8	1,5	11,8	2,9	11,6	4,35	12,0	5,6	11,3	11,7
3	17,0	18,3	1,5	18,2	2,9	17,6	4,55	18,5	5,8	17,4	18,0
4	17,9	25,1	1,55	24,6	3,15	24,2	4,55	24,9	5,95	23,6	24,3
5	18,9	32,2	1,6	31,5	3,25	31,0	5,0	31,8	6,3	30,2	31,3
6	20,0	39,8	1,7	38,6	3,35	37,9	5,45	39,6	6,7	37,3	38,7
7	21,2	47,8	1,8	46,1	3,75	45,8	5,7	47,4	7,2	44,8	46,4
8	23,3	56,7	1,95	54,3	4,05	54,3	6,3	56,3	8,25	53,4	55,0
9	26,1	66,3	2,45	64,8	4,7	64,2	7,0	66,1	8,95	62,8	64,8
10	30,8	78,4	2,85	76,7	5,85	76,6	8,6	78,1	11,05	74,4	76,8

La marche de ces distillations est, comme on le voit, aussi identique que possible, quoiqu'elles aient été faites dans des conditions bien différentes. Dans les unes, en effet, on a distillé le mélange d'acide et d'eau tel qu'on l'obtenait; dans les autres, l'acide a d'abord été saturé, puis remis en liberté par l'acide phosphorique. Néanmoins, la régularité est telle, qu'il est possible de calculer presque rigoureusement ce qu'il y a d'acide acétique dans une liqueur, sachant ce qui en a distillé dans un volume déterminé. Mais, pour appliquer sûrement ces résultats, j'avais une autre étude à faire. Mes liquides acides n'étaient pas en effet des dissolutions d'acide acétique dans l'eau pure; ils étaient en outre alcooliques et renfermaient de la glycérine et autres produits. Il importait de savoir comment se comportaient à la distillation de pareils liquides.

Pour le savoir, je mélangeai à 20 centimètres cubes de la liqueur précédente, saturant 47^{cc},6 d'eau de chaux de 26,9, d'abord 2, puis 10 grammes de glycérine; je ramenai au volume de 110 centimètres cubes, et je distillai en fractionnant les produits comme précédemment. Voici les résultats :

	20 ^{cc} .		20 ^{cc} + 2 ^{re} de glycérine.		20 ^{cc} + 10 ^{re} de glycérine.	
	cc	Pour 100.	cc	Pour 100	cc	Pour 100.
1	2,6	5,5	2,55	5,4	2,75	5,8
2	2,9	11,6	2,75	11,1	2,75	11,5
3	2,9	17,6	2,9	17,2	2,85	17,5
4	3,15	24,2	3,1	23,7	3,05	23,0
5	3,25	31,0	3,15	30,4	3,1	30,5
6	3,35	37,9	3,3	37,3	3,2	37,2
7	3,75	45,8	3,55	44,8	3,5	44,5
8	4,05	54,3	4,1	53,3	3,8	52,7
9	4,7	64,2	4,55	62,9	4,45	61,8
10	5,85	76,6	5,45	74,4	5,35	73,1

L'influence des substances dissoutes paraît donc nulle. On peut cependant remarquer que plus il y a de glycérine, moins il passe d'acide acétique.

Pour connaître maintenant l'influence de l'alcool, il n'y avait qu'à ajouter à 20 centimètres cubes de la même liqueur acide, d'abord 10, puis 20 centimètres cubes d'alcool à 90 degrés.

	20 ^{cc} .		20 ^{cc} + 10 ^{cc} d'alcool.		20 ^{cc} + 20 ^{cc} d'alcool.	
	cc	Pour 100.	cc	Pour 100.	cc	Pour 100.
1	2,6	5,5	1,4	2,9	1,0	2,1
2	2,9	11,6	2,05	7,2	1,5	5,3
3	2,9	17,6	2,7	12,9	2,25	10,0
4	3,15	24,2	3,15	19,5	3,0	16,3
5	3,25	31,0	3,35	26,6	3,5	23,7
6	3,35	37,9	3,55	34,1	3,85	31,8
7	3,75	45,8	3,9	42,2	4,15	40,4
8	4,05	54,3	4,3	51,2	4,55	50,0
9	4,7	64,2	4,95	61,8	5,25	61,0
10	5,85	76,6	6,15	74,5	6,95	75,6

On voit qu'à mesure que la quantité d'alcool augmente, les proportions d'acide acétique qui passent au commencement de la distillation sont de plus en plus faibles; mais, en revanche, aussitôt que l'alcool a disparu, la liqueur étant d'autant plus riche en acide qu'elle s'est tout d'abord moins appauvrie, les proportions augmentent, et finalement le résultat est le même, quelle qu'ait été la composition de la liqueur.

Pour plus de sûreté, j'ai cherché encore ce que donnait la distillation d'un liquide à la fois glycérique et alcoolique, et j'ai retrouvé les mêmes résultats.

J'étais donc en possession d'un procédé permettant de doser assez facilement et assez exactement de très-faibles quantités d'acide acétique ou d'un acétate existant dans un liquide. Toutefois, bornés là, ces essais n'eussent pas été suffisants, à cause de la présence dans les liquides de fermentation des acides gras qui accompagnent l'acide acétique. Il était nécessaire de savoir comment se comportaient ces acides dans les conditions des expériences précédentes.

J'ai étudié surtout les acides butyrique et valérianique, qui paraissent les deux plus importants, après l'acide acétique.

Voici les résultats obtenus pour l'acide butyrique. La liqueur acide employée était telle, que 10 centimètres cubes demandaient pour leur saturation 69^{cc},7 d'eau de chaux de 26^{cc},9. J'en ai distillé d'abord 110 centimètres cubes, puis 10 centimètres cubes étendus à 110.

	110 ^{cc} .		10 ^{cc} .	
	cc	Pour 100.	cc	Pour 100.
1	103,6 (*)	13,4	9,25 (*)	13,3
2	110,5	27,7	10,7	28,7
3	105,6	41,4	9,75	42,7
4	95,0	53,8	8,6	55,0
5	84,0	64,8	7,4	65,5
6	72,0	74,2	6,35	74,7
7	60,0	82,0	5,25	82,4
8	50,0	88,5	4,15	88,4
9	40,0	93,7	3,35	93,2
10	30,0	97,8	2,65	97,0
11	20,0	100,2	1,85	99,8

(*) Il y a une irrégularité pour les premiers termes de chacune de ces séries qui ne sont pas régulièrement décroissantes. Cela tient à ce qu'une fraction variable des 10 premiers centimètres cubes distille avant l'ébullition, et renferme alors moins d'acide.

La régularité des nombres est, comme on le voit, aussi grande que pour l'acide acétique, mais il y a une chose singulière : tandis que l'acide acétique, qui bout à 125 degrés, ne passe que très-difficilement à la distillation, l'acide butyrique, qui bout à 164 degrés, suit les premières portions de liquide, et j'ai poussé exprès la distillation à siccité pour montrer qu'on peut l'obtenir complètement.

Restait à chercher ce qui se passait quand on faisait des mélanges en diverses proportions d'acide butyrique et d'acide acétique, dont le mode de distillation était si différent. Le tableau suivant résume les essais faits dans ce sens. La présence de l'alcool étant, comme je l'ai montré, indifférente, j'en ai ajouté dans deux cas et pas dans les deux autres.

	25 ^{cc} d'acide acétique + 10 ^{cc} d'acide butyrique.		25 ^{cc} d'acide acétique + 4 ^{cc} d'acide butyrique + 10 ^{cc} d'alcool.		25 ^{cc} d'acide acétique + 2 ^{cc} d'acide butyrique.		25 ^{cc} d'acide acétique + 1 ^{cc} d'acide butyrique + 10 ^{cc} d'alcool.	
	cc	Pour 100.	cc	Pour 100.	cc	Pour 100.	cc	Pour 100.
1	15,0	11,2	4,15	4,5	5,35	6,9	2,55	3,6
2	14,7	22,2	5,9	10,9	5,3	13,8	3,25	8,2
3	13,9	32,4	7,65	19,3	5,8	21,2	4,7	14,9
4	12,75	42,0	8,25	28,3	5,8	28,8	5,05	22,1
5	11,85	50,8	8,30	37,4	5,85	36,3	5,3	29,6
6	10,95	58,9	8,0	46,1	6,0	44,1	5,55	37,5
7	10,35	66,7	7,95	54,8	6,15	52,0	5,8	45,8
8	9,85	74,0	7,95	63,5	6,45	60,4	6,35	54,9
9	9,85	81,4	8,3	72,5	7,1	69,5	7,35	66,8
10	10,35	89,2	9,35	82,7	8,4	80,4	8,4	78,4

Le liquide acétique employé était tel, que 10 centimètres cubes exigeaient pour la saturation 25^{cc},3 d'eau de chaux de 28,6, et le liquide butyrique tel, que 10 centimètres cubes exigeaient 71 centimètres cubes de la même eau de chaux. En étudiant la première série de nombres dans chaque essai, on voit que la marche de la distillation dépend de la proportion des deux acides contenus dans le liquide. Ainsi, pour le premier essai, où les deux acides sont à équivalents égaux, le caractère dominant est celui d'une distillation avec acide butyrique seul. L'influence de l'acide acétique ne se fait sentir qu'à la fin, où le titre des diverses prises, après être resté un instant stationnaire, recommence à croître. Cette influence est plus sensible dans le deuxième essai, où le rapport des équivalents est à peu près de 2 à 1; elle apparaît dès la huitième prise. Elle est plus sensible encore dans le troisième, où il y a à peu près 5 équivalents d'acide acétique pour 1 d'acide butyrique. Enfin, dans le quatrième essai, où il y a un excès d'acide acétique, l'autre acide n'intervient que pour augmenter les nombres au commencement de la série, qui est du reste croissante, comme s'il n'y avait pas de ce dernier acide.

J'ai obtenu les mêmes résultats avec l'acide valérianique. Comme l'acide butyrique, il passe dans les premiers produits de la distillation. Les mélanges d'acide acétique et d'acide valérianique se comportent comme les mélanges du tableau précédent, et les mêmes conclusions subsistent.

Or, ces conclusions étaient la possibilité non-seulement de doser les acides volatils, de quelque nature qu'ils soient, renfermés dans une liqueur, mais encore d'être renseigné d'une manière assez précise sur leur composition. Il est évident, en effet, que si en distillant un liquide de fermentation, et en fractionnant les produits comme précédemment, j'obtenais une série régulièrement croissante pour les quantités d'acide, ce devait être de l'acide acétique à peu près pur. De même pour

l'acide butyrique ou valérianique, si la série était décroissante. Si au contraire c'était un mélange que l'on distillait, la marche des nombres obtenus en avertissait fidèlement. J'ai fait divers essais de cette nature; tous les liquides que j'ai étudiés se sont montrés comme contenant un mélange d'acides gras, mais dans lesquels l'acide acétique dominait. La marche des nombres s'est généralement rapprochée de celle du troisième essai du tableau ci-dessus; la progression redevenait croissante à partir de la quatrième ou de la cinquième prise. J'ai donc pu supposer, d'après les résultats précédents, que lorsque j'avais distillé les $\frac{10}{11}$ de ces liquides, j'avais obtenu environ $\frac{80}{100}$ de l'acide total. Je multipliais donc le nombre de centimètres cubes d'eau de chaux employés pour la saturation par $\frac{5}{4}$, et j'évaluais le tout en acide acétique, qui est l'acide dominant. C'est ainsi que j'ai obtenu tous les nombres donnés dans ce travail.

Pour ne laisser prise à aucune objection, j'ai toujours, comme on le verra, fait des expériences comparatives. J'obtenais ainsi deux liquides que j'étudiais de la même manière, dont je distillais les mêmes quantités, et autant que possible dans les mêmes conditions. En outre, chaque expérience a été répétée au moins trois fois avec des proportions différentes de matières. Je pense ainsi m'être mis à l'abri de toutes les causes d'erreurs, si nombreuses quand on s'occupe des fermentations et qu'on a, comme j'avais à le faire, à étudier les variations de quantités extrêmement petites d'un de leurs produits.

Je résume la manière d'opérer. 110 centimètres cubes du liquide de fermentation, filtré bien limpide, évaporé après saturation si son trop grand volume rendait cette opération nécessaire, étaient distillés au volume de 100 centimètres cubes. Dans le liquide distillé, on dosait les acides libres au moyen de l'eau de chaux; on multipliait le nombre lu sur la burette par $\frac{5}{4}$, et on avait la quantité totale d'acide que l'on évaluait en acide acétique.

Il y avait dans cette opération une cause d'erreur qu'il importait d'éviter. Le liquide distillé contenait toujours de l'acide carbonique, dont la présence a les inconvénients que j'ai détaillés à propos du dosage de l'ammoniaque. Exposer le liquide dans le vide eût été ici un procédé un peu long, le faire bouillir eût fait disparaître une portion de l'acide. Il est plus commode d'y insuffler de l'air et de chasser ainsi l'acide carbonique par déplacement. On enfonce dans le liquide, contenu dans une longue éprouvette, un tube de verre communiquant avec la buse d'un soufflet. Cinq minutes d'insufflation sont toujours suffisantes. Le dosage est alors facile, et la couleur du tournesol, une fois virée au bleu, conserve indéfiniment cette nuance. Quant à la perte d'acide occasionnée par ce procédé, elle est tout à fait nulle, ainsi que je m'en suis assuré directement, et comme il est d'ailleurs facile de le prévoir, les 100 centimètres cubes sur lesquels j'agissais ne renfermant jamais $\frac{1}{1000}$ de leur poids d'acide acétique.

Pour mettre en liberté les acides volatils dans un liquide renfermant leurs sels de chaux, j'ai toujours employé l'acide phosphorique de préférence à l'acide sulfurique. Il est, je crois, absolument impossible d'éviter le passage de ce dernier à la distillation, et en quantités assez sensibles pour fausser un dosage. Avec l'acide phosphorique, ou même l'acide tartrique, l'erreur devient insignifiante.

Ces préliminaires posés, entrons dans l'étude des faits.

I. *Présence constante de l'acide acétique dans la levûre.*

Il est d'abord facile de se convaincre que la levûre renferme toujours de l'acide acétique, qu'elle provienne d'une brasserie ou de chez un levûrier. Il suffit pour cela qu'elle ne vienne pas d'être lavée à grande eau et qu'elle ait été abandonnée quelque temps à elle-même.

Aussi, le 19 mars 1864, je fais retirer du milieu d'un sac de levûre une masse de cette matière pesant 500 grammes. Cette levûre est très-belle, très-blanche, grasse au toucher, et aussi sèche qu'il est possible de l'obtenir par une compression puissante exercée sur le sac. L'examen le plus attentif au microscope n'y fait découvrir que des globules de levûre ronds et translucides. Je délaye simplement cette levûre dans 2 litres d'eau et je jette le tout sur un filtre. L'eau de lavage, qui passe assez trouble, est précipitée par un excès d'eau de chaux, refiltrée à peu près limpide, évaporée et traitée pour l'acide acétique : elle en renferme 0^{gr},329.

Or, cet acide acétique ne provient évidemment pas de celui que la levûre aurait pu apporter du liquide dont elle est sortie. La prise d'essai avait d'ailleurs été faite au centre du sac, où certainement l'air n'avait pas accès. L'acide obtenu provenait donc de la levûre. Il était du reste facile de le montrer directement.

120 grammes de levûre bien fraîche, et lavée trois fois à grande eau par décantation, sont abandonnés à eux-mêmes pendant deux jours. Une fermentation visible s'y produit. Comme l'avait observé M. Pasteur, des bulles d'acide carbonique pur se dégagent du sein de la masse. Dans cet intervalle, aucun ferment étranger n'intervient soit dans la levûre, soit à la surface du liquide. Cependant, en lavant la levûre au bout de ces deux jours et en distillant le liquide de lavage, on trouve d'abord qu'il renferme de l'alcool, puis 0^{gr},054 d'acide acétique.

Or, que s'est-il passé dans cette levûre pendant ces deux jours ? Une véritable fermentation alcoolique. « La levûre très-active que l'on délaye dans l'eau, dit M. Pasteur, porte son activité sur ses propres tissus. Il se produit de l'alcool en quantités extrêmement petites et de l'acide carbonique parfaitement pur, et on voit les globules s'altérer, absolument comme il arrive dans le cas des fermentations alcooliques ordinaires.... Le gaz hydrogène n'apparaît, la formation de l'al-

cool ne s'arrête qu'après les premiers jours, alors que le microscope fait voir diverses levûres, notamment la levûre lactique et des infusoires (1). »

Malheureusement, ce dernier phénomène se produit toujours très-rapidement, et on ne peut pas abandonner ainsi la levûre longtemps à elle-même. Mais le fait de la production d'acide acétique, en l'absence complète de sucre, n'en est pas moins évident, et il se montre corrélatif d'un phénomène de vie dans la levûre, d'une combustion exercée par celle-ci sur ses propres tissus. L'étude des fermentations alcooliques va nous ramener aux mêmes conclusions.

L'idée qui est en effet née de mes études et que je vais essayer de démontrer, c'est que la production d'acide acétique dans une fermentation alcoolique est liée à la destruction de la levûre pendant la fermentation. Je montrerai que les deux faits, de destruction rapide des tissus de la levûre et de production exagérée d'acide acétique, s'accompagnent toujours, et que cette dépendance permet d'expliquer toutes les anomalies que présentent les diverses proportions d'acides gras développées pendant les fermentations.

II. *Fermentation subséquente de la levûre lorsque le sucre a disparu.*

Lorsque la quantité de levûre est exagérée vis-à-vis de celle du sucre, la fermentation est très-rapide. Si, lorsqu'elle est terminée, on examine la levûre, on la voit formée de globules portant pour la plupart un jeune bourgeon. M. Pasteur a montré que ceux-ci avaient une vitalité persistante après la disparition complète du sucre, et il a fait voir qu'alors les jeunes globules vivaient aux dépens du globule mère. En effet, dans une masse où l'on a pour ainsi dire amorcé la levûre en introduisant peu de sucre, on voit la vie se continuer après que le sucre a disparu; le dégagement de gaz ne s'arrête pas et on observe les mêmes phénomènes que ceux que présente la levûre bien fraîche abandonnée à elle-même. Voyons si pendant cette deuxième période de la fermentation il ne se produirait pas, comme précédemment, de l'acide acétique.

Pour le savoir, je dispose les trois fermentations suivantes avec de la levûre fraîche et bien lavée.

I.		II.		III.	
Levûre	250 ^{gr}	Levûre	250 ^{gr}	Levûre	250 ^{gr}
		Sucre candi . . .	50	Sucre candi . . .	50

Le liquide I donnait la quantité d'acide acétique que la levûre apportait avec elle; l'un des deux autres, filtré aussitôt le sucre disparu, donnait la quantité

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. LVIII, p. 420.

d'acide produite pendant la fermentation; le troisième était abandonné à lui-même pour subir la fermentation subséquente.

Avec ces proportions de sucre et de levûre, la fermentation est extrêmement énergique et rapide. Commencée le 27 avril à huit heures du matin, elle est tout à fait terminée le soir à trois heures; les 50 grammes de sucre ont disparu. Il est nécessaire pour cette étude de savoir saisir assez exactement le moment où il n'y a plus de sucre. Tant qu'il en reste, l'agitation à l'intérieur du liquide est extrême, la levûre est répandue partout et l'acide carbonique se dégage dans toute la masse. Sitôt que le sucre a été transformé en entier, la levûre se dépose au fond; c'est alors elle seule qui fermente, et on voit partir du milieu de la couche qu'elle forme une foule de grosses bulles qui montent à la surface entourées d'une épaisse gaine de levûre. Aussitôt qu'on aperçoit ce phénomène, on peut être certain qu'il n'y a plus de sucre.

A 3 heures je filtre les deux liquides I et II. Pour bien laver la levûre qui reste sur le filtre, je la mets en suspension dans de l'eau que je porte à 70 degrés. Je filtre ensuite de nouveau.

Le liquide non fermenté, I, contient $0^{\text{gr}},327$ d'acide acétique. Quant au liquide fermenté, il en contient $0^{\text{gr}},351$. Il s'est donc produit très-peu d'acide acétique pendant cette fermentation, qui est une fermentation alcoolique ordinaire, comme je m'en suis assuré. Il y a en effet dans le liquide les produits habituels. On peut, par exemple, en retirer de la glycérine. Pour cela, on traite le résidu de l'évaporation du liquide par le mélange éthéro-alcoolique employé par M. Pasteur. Seulement cette première opération donne une glycérine impure, amère au goût. Pour la purifier, on la reprend par un liquide alcoolique plus éthéré que le précédent (100 alcool, 200 éther). On évapore, puis on verse quelques gouttes d'acétate de plomb. On filtre, on précipite l'excès de sel de plomb dans le liquide filtré par l'hydrogène sulfuré, et en évaporant doucement, pour laisser à l'acide acétique le temps de partir, on a de la glycérine avec l'odeur et le goût que présente toujours cette substance, lorsqu'elle provient d'un liquide de fermentation.

Étudions maintenant ce qui se passe dans le liquide où le sucre a disparu, et où la levûre est abandonnée à elle-même. Le dégagement de gaz y continue, on dirait une fermentation ordinaire. La levûre est tassée au fond; de petites bulles se dégagent des couches superficielles; les couches profondes envoient de grosses bulles qui montent à la surface, entraînant avec elles une enveloppe de levûre. Nul doute qu'il ne se produise de l'alcool. M. Pasteur l'a démontré dans son Mémoire.

Mais en même temps de l'acide acétique prend naissance et en quantités d'autant plus grandes, que l'on abandonne le liquide plus longtemps à lui-même. J'ai conservé de ces fermentations subséquentes pendant six à huit jours, sans voir

intervenir rien d'étranger. Mais pour éviter toute objection relative à la difficulté d'explorer suffisamment avec le microscope les diverses parties de cette fermentation, je l'arrête au bout de deux jours. La levûre, très-pure, a changé d'aspect; la matière intérieure paraît s'être condensée en petites granulations; la vacuole que présentait la levûre fraîche a disparu, le globule a l'aspect un peu flétri.

Or, ce liquide renferme $0^{\text{gr}}, 527$ d'acide acétique. La quantité de cet acide produite pendant la fermentation consécutive de celle du sucre est donc considérable, et elle se montre encore ici corrélative d'une destruction de tissus.

J'ai répété ces expériences sur des quantités différentes de sucre et de levûre. Un de mes essais, par exemple, a été fait en mélangeant 100 grammes de sucre candi à 500 grammes de levûre. Tout le sucre a disparu en treize heures. Le résultat est toujours le même : la production d'acide acétique, faible pendant la fermentation du sucre, s'exagère beaucoup pendant celle de la levûre.

Ce procédé expérimental, quoique sûr dans ses résultats, ne se prêtait pas à une étude rigoureuse, à cause de la difficulté de manier d'aussi grandes masses de levûre. Malheureusement, il était impossible de le ramener à des proportions plus restreintes sans diminuer considérablement la quantité d'acide acétique formé, et la rendre insensible. J'ai cependant réussi, par un artifice particulier, à refaire sur une échelle réduite l'essai précédent, c'est-à-dire à placer de petites quantités de levûre dans un état de vie très-active dans un liquide de fermentation où elles avaient pourtant transformé des quantités notables de sucre, et j'ai pu observer sur elles les mêmes faits que précédemment. Voici le moyen que j'ai employé.

III. *Fermentation en présence du tartrate d'ammoniaque.*

Dans le travail sur l'absorption de l'ammoniaque par la levûre, j'ai parlé de la rapidité vraiment singulière qu'imprime à une fermentation la présence du tartrate d'ammoniaque. La vitalité de la levûre est augmentée : ses globules ne s'épuisant pas en azote, comme ils le font dans les fermentations ordinaires, se trouvent toujours jeunes et frais, et l'effet produit est le même que si la levûre était en poids beaucoup plus considérable. Cette analogie avec le cas précédent se soutient jusqu'à la fin, et dans ces conditions, une fois la fermentation normale accomplie, il peut se produire une fermentation subséquente donnant naissance à de l'acide acétique.

Le 5 juillet 1864, je place à l'étuve les liquides de fermentation suivants :

I.		II.	
Sucre candi.....	30 ^{gr}	Sucre candi.....	30 ^{gr}
Levûre fraîche (sèche, 1 ^{gr} ,847)	10	Levûre fraîche (sèche, 1 ^{gr} ,847).	10
Tartrate d'ammoniaque.....	1	Tartrate droit d'ammoniaque...	1
Cendres de levûre (1).....	0,1	Cendres de levûre.....	0,1

Le 7 juillet, la fermentation normale est terminée dans les deux. Tout le sucre a disparu. Voici à quoi on s'en aperçoit :

Tant qu'il y a du sucre, la fermentation est rapide et marche à peu près avec la même activité du commencement à la fin. Puis vient un moment où le dégagement cesse à peu près tout à coup. A ce moment, le liquide tout trouble commence à laisser déposer de la levûre, et il ne se produit plus qu'une foule de très-petites bulles de gaz partant du fond. On peut alors être sûr qu'il n'y a plus de sucre.

J'enlève alors le liquide I que je filtre. Quant au liquide II, il continue encore longtemps à fermenter, et l'analogie d'aspect est complète avec la fermentation avec excès de levûre. Le dégagement gazeux, lent mais continu, durait encore le 11 juillet. Je filtre et j'étudie ce jour-là le liquide.

Si l'on cherche la quantité d'acide acétique développée dans I et II, on trouve que I en renferme 0^{gr},136 et que II en renferme 0^{gr},178. 42 milligrammes d'acide ont donc pris naissance pendant la fermentation subséquente à celle du sucre. Or dans ce cas, plus facilement que dans le précédent, on peut montrer que cette fermentation secondaire a été accompagnée d'une destruction des tissus de la levûre.

En effet, le poids de cette substance dans I est de 2^{gr},550, dans II de 2^{gr},180 seulement. Il y a donc eu ici, en même temps, destruction de tissus et production d'acide.

L'étude des quantités d'ammoniaque disparues dans ces deux liquides est curieuse. Sur les 0^{gr},184 introduits, il y a eu 0^{gr},105 absorbés dans I et 0^{gr},106 dans II. L'absorption dans la fermentation subséquente est, comme on le voit, extrêmement faible, et nullement comparable à l'absorption considérable faite par la levûre pendant la transformation du sucre.

L'aspect des deux levûres au microscope présente les mêmes différences que dans le cas des fermentations avec excès de levûre. Seulement, elles sont ici mieux accusées. Celle de I (*fig. 9*) est formée de globules turgescents d'une transparence parfaite, portant presque tous un petit globule à bords peu nets. Un certain nombre de ces globules beaucoup plus petits que les premiers paraissent réduits

(1) La présence des cendres de levûre n'est pas indispensable; elles sont destinées à fournir aux globules nouveaux leurs éléments minéraux, mais la destruction rapide de tissus qui se produit dans un pareil liquide suffit amplement à cela.

à leur enveloppe et ne présentent rien à l'intérieur. Les globules de II (*fig. 10*) sont plus isolés, à bords épais, granuleux à l'intérieur; le nombre des globules vides y est plus grand que dans I.

J'ai répété cette expérience toujours avec les mêmes résultats. Je donne dans le tableau suivant le résumé de deux cas où l'étude a été complète: c'est le précédent, et un autre accompli avec des proportions différentes de sucre et de levûre.

SUCRE.	TARTRATE.	LEVURE AVANT.	LEVURE APRÈS.	ACIDE ACÉTIQUE formé.	AMMONIAQUE disparue.
gr	gr	gr	gr	gr	gr
30	1	1,847	2,550	0,136	0,105
30	1	1,847	2,180	0,178	0,106
5	0,25	0,104	0,171	0,030	0,013
5	0,25	0,104	0,110	0,051	0,014

L'idée qui ressort des expériences précédentes est celle-ci : toutes les fois que la levûre vit aux dépens d'elle-même, en se détruisant, elle donne naissance à de l'acide acétique. Mais d'où provient celui que l'on trouve dans toutes les fermentations accomplies en dehors des conditions spéciales où je me suis placé jusqu'ici? d'où provient celui qui prend naissance pendant la période normale des fermentations précédentes? C'est ce que nous allons rechercher.

IV. Fermentations avec eau de levûre et sans eau de levûre.

Qu'arrivera-t-il, si nous plaçons en présence d'une quantité assez notable de sucre candi dissous dans l'eau distillée un poids relativement minime de levûre fraîche? M. Pasteur a montré que dans ce cas, malgré les mauvaises conditions où elle se trouve, la levûre n'en va pas moins faire fermenter le sucre. Elle bourgeonnera comme à l'ordinaire; seulement, les globules nouveaux ne trouvant en dehors d'eux, dans le sucre, qu'un aliment carboné, vont emprunter l'azote aux globules mères. Par le fait de leur existence, la levûre formée au commencement sera donc soumise à une destruction perpétuelle tant qu'il y aura du sucre à transformer. Cela est si vrai, que si, à un moment quelconque, on étudie la levûre d'une fermentation pareille, on voit au milieu de globules jeunes et vigoureux une quantité notable de globules à parois épaisses, sans granulations ni liquide intérieur. J'emploierai un mot un peu vulgaire, mais tout à fait caractéristique, en disant qu'ils paraissent vidés. Plaçons en regard une fermentation pareille pour le sucre et la levûre, mais dans laquelle, au lieu d'eau distillée, nous aurons mis une eau chargée de

matières albuminoïdes, l'eau de levûre. Nous aurons ainsi fourni aux bourgeons qui veulent se développer tous les matériaux nécessaires; ils n'auront pas autant de raisons de vivre aux dépens des globules déjà formés, et, si ce que je veux démontrer est vrai, nous devons avoir dans ce dernier cas moins d'acide acétique produit que dans le premier.

L'expérience va en effet nous le démontrer. Le 5 juillet 1864, je dispose les deux fermentations :

I.		II.	
Sucre candi.....	15 ^{gr}	Sucre candi.....	15 ^{gr}
Levûre fraîche (sèche, 0 ^{gr} ,184).	1	Levûre fraîche (sèche, 0 ^{gr} ,184).	1
Eau distillée.....	250 ^{cc}	Eau de levûre.....	250 ^{cc}

Ces 250 centimètres cubes d'eau de levûre renfermaient 0^{gr},650 de matière sèche.

Dès le soir, la différence entre ces deux fermentations est complète. Dans II, le dégagement est rapide, le liquide tout mousseux à la surface. Dans I, c'est à peine si l'on aperçoit quelques bulles de gaz. Ces différences s'exagèrent les jours suivants. Aussi la fermentation dans II est-elle terminée le 13 juillet, tandis que dans l'autre elle dure encore le 1^{er} août. Ce jour-là j'y mets fin, la trouvant assez avancée pour ce que je voulais en faire. Un dosage de sucre montre qu'il en reste encore 2^{gr},448 non transformés.

Au microscope, les deux levûres sont tout à fait différentes; celle de II (*fig.* 12) est jeune, très-identique à celle de I de l'essai précédent, fait du reste avec la même levûre. Quant à celle de I (*fig.* 13), elle est formée de globules moyennement moitié moins gros que dans II, un peu ramifiés, généralement oblongs, noirâtres et granuleux à l'intérieur.

Or, si on étudie les quantités d'acide formées, il y en a dans I 0^{gr},077, et dans II 0^{gr},037 seulement. Quant aux poids de levûre, ils sont dans I de 0^{gr},325, dans II de 0^{gr},536.

Nous observons donc encore ici le phénomène d'une faible production d'acide acétique dans une fermentation où cependant le poids de la levûre s'est extrêmement accru, et d'une production plus considérable dans un autre essai où la levûre n'a pas augmenté de poids, mais où les nécessités de son existence l'ont contrainte à une vie assez active au moyen de ses propres tissus.

Ces résultats sont constants quand on se place dans les conditions ci-dessus. Le tableau suivant en fait foi.

SUCRE.	MATIÈRE albuminoïde dans l'eau de levûre.	LEVURE AVANT.	LEVURE APRÈS.	ACIDE ACÉTIQUE formé.
gr	gr	gr	gr	gr
15	»	0,184	0,325	0,079
15	0,650	0,184	0,536	0,037
15	»	0,200	0,337	0,081
15	0,787	0,200	0,665	0,040
20	»	0,430	0,641	0,162
20	3,016	0,430	1,260	0,102

V. *Origine de l'acide acétique des fermentations.*

Nous pouvons maintenant nous demander d'où provient l'acide acétique que l'on rencontre d'une manière normale dans toutes les fermentations alcooliques. Jusqu'ici, j'ai fait voir que la destruction des tissus de la levûre était toujours corrélative de la production d'acides gras. Faut-il admettre que ceux des liquides fermentés sont dus à une autre cause? Doit-on croire, par exemple, que ceux que nous a présentés la fermentation avec eau de levûre provenaient de la transformation du sucre? La question serait facile à résoudre s'il était possible de déterminer une fermentation sans qu'il y eût en même temps production d'acides. Je l'ai essayé sans jamais y réussir. Mais on peut arriver à la solution d'une manière détournée, il suffit de remarquer que la question se réduit à celle-ci : Peut-on admettre qu'il n'y ait aucune destruction des tissus de la levûre dans les fermentations, même celles qui sont accomplies dans les meilleures conditions? Tout dépend de la manière dont on répondra à cette question. Si c'est oui, mes expériences n'expliquent que la formation d'une partie des acides gras. Si c'est non, la totalité des acides proviendra de la levûre.

Or, cette dernière opinion doit évidemment être adoptée. Puisqu'il y a fermentation, il y a vie, et par conséquent mouvement de destruction et de reconstitution incessante. La reconstitution se manifeste par la formation de globules nouveaux, qui vivent attachés au globule mère tant qu'ils n'ont pas acquis une certaine grosseur. Il est évident que pendant cette première partie de leur existence ils doivent lui emprunter quelque chose, peu de chose, s'ils rencontrent autour d'eux, comme dans la fermentation avec eau de levûre, tout ce qu'il leur faut pour vivre; beaucoup, s'il n'y a rien au dehors que du sucre pur. Dans ce dernier cas, la reproduction de la levûre est lente, mais la désorganisation produite par les jeunes bourgeons est intense. Dans l'autre, l'action sur le globule mère est faible,

mais la germination rapide. Aussi trouve-t-on, pour un même poids de levûre introduite, beaucoup plus de levûre dans ce dernier cas que dans le premier.

Les générations de globules se succèdent ainsi dans une fermentation, chacune d'elles remplaçant la précédente qui meurt après avoir accompli son action. Ceci n'est pas une pure hypothèse et peut être démontré directement.

Reportons-nous en effet à l'expérience décrite p. 257, à propos de l'absorption de l'ammoniaque par la levûre. Nous avons vu 40 grammes de sucre disparaître en sept jours par l'action d'un poids de 2^{gr},501 de levûre sèche, en présence de 1 gramme de tartrate droit d'ammoniaque. Sur les 0^{gr},152 d'azote que contenait ce tartrate, il n'en restait plus après la fermentation que 0^{gr},048. 0^{gr},106 d'azote ont donc disparu, et nous les avons retrouvés à l'état de matière albuminoïde en dissolution dans le liquide, où ils étaient unis à 0^{gr},064 provenant de la levûre. En somme, il y avait dans cette matière 0^{gr},170 d'azote, tandis que la levûre restant après la fermentation n'en renfermait que 0^{gr},148 seulement. Or, cette matière albuminoïde ayant fait partie des matériaux de la levûre, le poids de cette levûre qui s'est dissous pendant la fermentation doit évidemment être supérieur à celui qu'on retrouve dans le liquide, une fois celle-ci accomplie. Ce fait est général, il peut se vérifier sur tous les exemples que j'ai donnés de fermentations avec tartrate. On voit que l'ammoniaque reste dans ce cas comme un témoin fidèle des transformations subies par la levûre. Aussitôt le sucre disparu, la levûre ne se reproduit plus, l'absorption de l'ammoniaque cesse; seulement, les globules continuent à vivre pendant quelque temps et à subir le phénomène de la destruction; d'où, comme je l'ai montré, la production de l'acide acétique pendant la fermentation subséquente. Mais celui qu'on trouve après la fermentation normale provient évidemment de la même cause, et il ne faut pas s'étonner s'il est en proportions considérables, la mutation de tissus se faisant, comme je viens de le montrer, avec une grande intensité.

Cette mutation est bien moins rapide dans une fermentation sans tartrate d'ammoniaque, la vitalité étant beaucoup moins grande. Il est dès lors facile de prévoir que de deux fermentations pareilles, l'une avec, l'autre sans tartrate, ce sera la première qui donnera le plus d'acides gras (1). Les essais suivants le prouvent.

(1) L'aspect de la levûre est aussi, comme on peut le prévoir, très-différent dans ces deux fermentations. Dans l'une, il y a toujours un grand nombre de globules turgescents, jeunes et circulaires. Dans l'autre, les globules sont contractés, comme flétris, à parois épaisses, granuleux à l'intérieur. Les *fig. 9* et *11* donnent une idée assez exacte de ces différences.

pour croire de nouveau à mesure que le nous savons, rien n'est plus facile à faire. Il y a eu fermentation subséquente dans deux cas, il a dû y avoir plus de conditions plus normales.

	AVANT.	LEVÛRE APRÈS.	ACIDE ACÉTIQUE produit.	AMMONIAQUE absorbée.
entre le sucre et la levûre correspondant au cas »	0,215	0,236	0,067	0,029
sucre sans s'épuiser subséquente à »	0,215	0,305	0,020	»
»	0,200	0,345	0,127	»
»	0,200	0,337	0,080	»
»	0,500	0,612	0,095	»
»	0,400	0,624	0,044	»
»	0,500	1,000	0,105	»
»	1,000	1,390	0,028	»
La levûre 30	1,000	1,847	0,171	0,106
acétique 30	»	1,847	0,105	»

0

Dans tous ces essais, les fermentations avec tartrate ont été interrompues à diverses époques, mais toujours après la fermentation du sucre, et pendant la fermentation subséquente. Il n'y a donc pas à s'étonner de l'irrégularité que présentent les poids de levûre.

Arrivé à ce point de mes études, il se présentait une vérification que je ne devais pas négliger. J'ai avancé dans la première partie de ce travail que lorsqu'on plaçait la levûre dans une fermentation en présence de l'eau de levûre et du tartrate d'ammoniaque, elle vivait au moyen du tartrate sans rien emprunter à la matière de l'eau de levûre. J'avais dans la production de l'acide acétique un moyen de vérifier ce fait, et dans une fermentation pareille le type devait être celui d'une fermentation avec tartrate pur, au lieu d'être celui d'une fermentation avec eau de levûre. Or, d'après les résultats précédents, une fermentation à tartrate donne plus d'acide acétique qu'une fermentation pareille sans tartrate, et celle-ci plus qu'une fermentation pareille aussi, mais avec de l'eau de levûre en plus. Il devait donc y avoir plus d'acide acétique dans une fermentation avec eau de levûre et tartrate que dans une fermentation avec eau de levûre seule. C'est ce que l'expérience a complètement vérifié.

Le 19 mars 1865, je dispose les trois liquides suivants :

I.	II.	III.
Sucre candi..... 5 ^{gr}	Sucre candi.... 5 ^{gr}	Sucre candi.... 5 ^{gr}
Levûre fraîche..... 0,5	Levûre fraîche. 0,5	Levûre fraîche. 0,5
Tartrate d'ammoniaque. 0,25	»	Tartrate..... 0,25
Eau distillée..... 175 ^{cc}	Eau de levûre.. 175 ^{cc}	Eau de levûre.. 175 ^{cc}

Les 0^{gr},5 de levûre représentent 0^{gr},104 à l'état sec; les 175 centimètres cubes eau de levûre 0^{gr},258 matière sèche. Je résume dans le tableau suivant les résul-

tats de l'étude de ces trois fermentations que j'ai détaillée dans la première partie de ce travail.

	ÉPOQUE de la fin de la fermentation.	LEVURE AVANT.	LEVURE APRÈS.	ACIDE ACÉTIQUE produit.	AMMONIAQUE absorbée.
I.	27 mars.	gr 0,104	gr 0,110	gr 0,049	gr 0,012
II.	26 mars.	0,104	0,285	0,028	»
III.	22 mars.	0,104	0,315	0,045	0,014

On voit que l'absorption d'ammoniaque dans I et III est à peu près la même. Quant à la quantité d'acides volatils, elle se rapproche dans III beaucoup plus de celle de la fermentation à tartrate que de l'autre.

Dès lors, il devait en être de même pour le vin, et l'addition de tartrate d'ammoniaque à un moût devait augmenter la quantité d'acides volatils existant dans le vin; c'est ce dont je me suis assuré en laissant fermenter d'un côté 200 centimètres cubes de moût, de l'autre 200 centimètres cubes de ce moût auquel j'avais ajouté 0^{gr},1 de tartrate d'ammoniaque. J'ai trouvé pour le premier 0^{gr},030 d'acides gras, pour le second 0^{gr},059. Les 200 centimètres cubes de moût renfermaient 44^{gr},44 de glucose C¹² H¹² O¹².

J'ai dit en commençant que le fait de la corrélation entre la production d'acides gras et la destruction des tissus de la levûre permettait d'expliquer toutes les anomalies que l'on rencontre dans l'étude de l'acide acétique des fermentations. J'avais alors en vue les résultats singuliers obtenus dans les conditions suivantes.

Le 6 mai 1864, je dispose les quatre liquides :

I.	II.	III.	IV.
Sucre..... 5 ^{gr}	Sucre..... 10 ^{gr}	Sucre..... 20 ^{gr}	Sucre..... 40 ^{gr}
Levûre..... 5	Levûre..... 5	Levûre..... 5	Levûre..... 5

Les 5 grammes levûre pèsent 0^{gr},866 à l'état sec.

Voici les poids de levûre et d'acide acétique que l'on trouve après fermentations :

I.	II.	III.	IV.
Levûre..... 0 ^{gr} ,701	0 ^{gr} ,851	0 ^{gr} ,957	1 ^{gr} ,055
Acide acétique... 0,094	0,034	0,043	0,087

Cette expérience, faite au début de mes études, n'avait pas laissé que de m'embarrasser beaucoup. Il me semblait singulier de voir les quantités d'acide produit être d'abord considérables par rapport au poids du sucre, puis aller en diminuant

pour croître de nouveau à mesure que le poids du sucre augmentait. Avec ce que nous savons, rien n'est plus facile à expliquer. Dans I, où il y a excès de levûre, il y a eu fermentation subséquente. Dans IV, il y a eu épuisement. Donc, dans ces deux cas, il a dû y avoir plus d'acide produit que dans II et III, faites dans des conditions plus normales. Il est bien probable que pour un rapport déterminé entre le sucre et la levûre, on aurait une quantité d'acides minima : ce rapport correspondant au cas où la levûre, encore assez vivante pour faire fermenter le sucre sans s'épuiser, serait cependant assez usée pour ne pas subir la fermentation subséquente à celle du sucre. En deçà ou au delà de ce rapport les quantités d'acide sont croissantes.

La levûre se présente donc à nous comme produisant continûment de l'acide acétique par son procès vital. Qu'il y ait du sucre ou qu'il n'y en ait pas, pourvu qu'elle ait la température et l'eau nécessaires, elle vivra en donnant de l'alcool et de l'acide acétique provenant de sa propre substance. S'il n'y a pas de sucre, cette vie ne durera pas longtemps, car la putréfaction viendra y mettre un terme. Au contraire, s'il y a du sucre, il y aura non-seulement vie continuée, mais reproduction, et l'accroissement d'activité fonctionnelle se traduira à la fois par une action intérieure sur la levûre et une action extérieure sur le sucre.

N'y a-t-il pas plus d'un point de ressemblance entre ces cellules et celles du pancréas, dont les fonctions ont été si bien étudiées par M. L. Corvisart; ces cellules qui, tant qu'elles sont dans des conditions normales, fournissent le suc pancréatique, et qui, une fois abandonnées à elles-mêmes, continuent à vivre, mais en se digérant elles-mêmes? N'y a-t-il pas aussi beaucoup d'analogie avec ces faits observés par Mitscherlich, qui, semant une plante, puis lui supprimant tout à coup les moyens d'existence, voyait dans cette plante les feuilles supérieures, les dernières formées, vivre aux dépens des feuilles inférieures, absolument comme, dans la levûre, les jeunes bourgeons vivent aux dépens du globule mère. Ces analogies se présentent à chaque instant à l'esprit, quand on étudie l'action de la levûre. Je ne les avance cependant qu'en hésitant, sachant fort bien qu'en dehors du terrain des faits il n'y a rien de solide.

Je présente avec confiance les résultats de ce travail. Je les ai vérifiés et ne les ai tenus pour bons que lorsque j'y ai été ramené plusieurs fois et par des routes différentes. Au début de ma carrière de chimiste, et avec un sujet aussi délicat que l'étude des fermentations, il n'y avait qu'un sentiment possible, la crainte de me tromper et le besoin de m'entourer de toute sorte de précautions expérimentales. Ces précautions, je n'avais, pour en apprendre le secret, qu'à voir travailler M. Pasteur dans son laboratoire, dans lequel j'ai eu le bonheur de passer trois ans. Aussi serais-je bien mal inspiré de ne pas me munir, vis-à-vis du lecteur, de cette dernière recommandation, et bien ingrat si je terminais ce travail sans exprimer à

M. Pasteur toute ma reconnaissance pour les utiles et affectueux conseils qu'il m'a toujours donnés. Un surtout m'a servi de guide dans tout le courant de cette étude. « Quand on étudie les fermentations, dit M. Pasteur, il n'est pas difficile de constater des faits particuliers, isolés, nouveaux ou paraissant l'être, tant ils sont nombreux et changeants; mais si l'on n'en recherche pas la liaison avec le phénomène principal, si l'on n'établit pas que cette liaison existe ou qu'elle n'existe pas, souvent, loin d'éclairer le sujet, on ne fait que l'obscurcir. » Je me suis efforcé de ne pas mériter ce reproche, et je serai assez récompensé si l'on juge que j'y ai réussi.



ÉTUDE
SUR LA
CONSTITUTION DE LA LUMIÈRE NON POLARISÉE
ET DE LA
LUMIÈRE PARTIELLEMENT POLARISÉE,

PAR M. E. VERDET,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

I.

« Si la polarisation d'un rayon lumineux, » dit Fresnel dans ses *Considérations mécaniques sur la polarisation de la lumière* (*), « consiste en ce que toutes ses vibrations s'exécutent suivant une même direction, il résulte de mon hypothèse sur la génération des ondes lumineuses qu'un rayon émanant d'un seul centre d'ébranlement se trouve toujours polarisé suivant un certain plan à un instant déterminé. Mais un instant après, la direction du mouvement change, et avec elle le plan de polarisation, et ces variations se succèdent aussi rapidement que les perturbations des vibrations de la particule éclairante; en sorte que, lors même qu'on pourrait séparer la lumière qui en émane de celle des autres points lumineux, on n'y reconnaîtrait sans doute aucune apparence de polarisation. Si l'on considère maintenant l'effet produit par la réunion de toutes les ondes qui émanent des différents points d'un corps éclairant, on sentira qu'à chaque instant, et pour un point déterminé de l'éther, la résultante générale de tous les mouvements qui s'y exercent aura une direction déterminée, mais que cette direction variera d'un instant à l'autre. Ainsi la lumière directe (**) peut être considérée comme la réunion, et plus exactement comme la succession rapide de systèmes d'ondes polarisés suivant toutes les directions. »

(*) *Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, t. XVII, p. 185.

(**) On sait que Fresnel appelle *lumière directe* ou *lumière ordinaire* ce que tout le monde aujourd'hui appelle *lumière naturelle* ou *lumière non polarisée*.

Le seul complément un peu essentiel qu'on puisse ajouter à ces paroles du créateur de la théorie des vibrations transversales consiste à dire qu'à un instant donné, et en un point donné de l'éther, les vibrations d'un rayon naturel doivent être considérées non comme rectilignes, mais comme elliptiques, puisque l'ellipse est la forme la plus générale que ces vibrations puissent affecter et comprend comme cas particulier la ligne droite et le cercle. En recherchant d'abord l'effet produit dans des circonstances données par une vibration elliptique, et ensuite l'effet moyen qui résulte des variations successives de cette vibration, on peut sans difficulté résoudre toutes les questions relatives aux propriétés de la lumière naturelle et aux modifications qui la transforment dans ce qu'on appelle lumière partiellement polarisée. Dans les cas complexes, il devient souvent nécessaire de recourir à la traduction analytique des raisonnements; on peut alors prendre exemple des méthodes de calcul développées par M. Stokes dans son *Mémoire sur la composition et la résolution des faisceaux polarisés émanés de sources différentes* (*). Le sujet semble donc épuisé, et cependant il arrive fréquemment que pour échapper à de prétendues difficultés on a recours à de nouvelles hypothèses (**), et même que l'interprétation inexacte de certains faits conduit à de graves erreurs (***). Je ne crois donc pas faire une chose inutile en publiant un exposé de l'enseignement que j'ai plusieurs fois donné sur cette question aux élèves de l'École Normale supérieure.

Venant longtemps après celle de M. Stokes, cette étude ne peut prétendre à la nouveauté que pour quelques détails et peut-être pour la méthode directement analytique qui y est suivie, et, bien plus encore que le savant professeur de Cambridge, je dois dire en commençant que la plupart des physiciens qui ont approfondi l'étude de l'optique ont dû probablement faire pour leur instruction personnelle des raisonnements et des calculs tout semblables à ceux que je vais développer. Mais, quand bien même on ne trouverait à ce travail qu'un intérêt purement didactique, il ne serait pas déplacé dans les *Annales* d'une École vouée avant tout aux progrès de l'enseignement.

(*) *On the composition and resolution of Streams of polarized Light from different sources* (imprimé en 1852 dans les *Transactions de la Société philosophique de Cambridge*, t. IX, p. 399). Ce Mémoire a pour objet direct l'interférence des rayons que M. Stokes appelle *indépendants*, c'est-à-dire dont les phases changent à des époques tout à fait diverses et indépendantes dans les deux rayons; mais il renferme tout ce qu'il importe de connaître pour déterminer sûrement les propriétés d'une succession de vibrations dont la période est constante et dont les autres éléments varient suivant une loi quelconque.

(**) Voyez ce qui est dit plus loin d'un Mémoire récent de M. Lippich (article V).

(***) C'est ainsi que M. J. Stefan (de Vienne) a prétendu démontrer, par une expérience d'ailleurs curieuse et intéressante, que la lumière naturelle ne contenait que des vibrations rectilignes, à l'exclusion de toute vibration elliptique ou circulaire. L'Académie des Sciences de Vienne a même sanctionné cette conclusion de son autorité, en accordant à M. Stefan le prix triennal fondé par M. Lieben pour récompenser les travaux de Physique et de Chimie (voyez *les Mondes*, livraisons du 1^{er} et du 15 juin 1865).

II.

On sait que deux propriétés essentielles caractérisent la lumière naturelle : premièrement, lorsqu'elle rencontre sous l'incidence normale un cristal biréfringent, elle se divise en deux rayons dont les intensités sont indépendantes de l'orientation du cristal (*); en second lieu, elle conserve cette propriété après s'être réfléchié totalement sous des angles quelconques autant de fois qu'on le voudra dans un corps uniréfringent, tandis que la lumière polarisée circulairement, qui se comporte comme la lumière naturelle lorsqu'elle rencontre un rhomboèdre de spath, par exemple, se transforme en lumière polarisée rectilignement par des réflexions totales opérées sous des incidences convenables (**). Le système des vibrations diverses et diversement orientées, dont la succession rapide constitue la lumière naturelle, doit donc satisfaire à deux conditions : il faut d'abord que, si l'on projette à chaque instant la molécule vibrante sur un plan mené par la direction du rayon, la composante du mouvement vibratoire ainsi obtenue, considérée pendant un temps très-court, mais suffisant pour contenir un nombre très-grand d'alternatives de vibrations, ait la même intensité moyenne, quelle que soit l'orientation du plan considéré; en outre, il est nécessaire que la même propriété subsiste après qu'on a soumis le rayon naturel à une action qui n'altère pas le rapport des intensités des composantes du mouvement estimées suivant deux directions rectangulaires, et qui ajoute une quantité constante quelconque à la différence de leurs phases. Trouver l'expression analytique de ces conditions, faire voir qu'il est possible d'y satisfaire et de quelle manière on y parvient le plus simplement, indiquer comment on peut déterminer les modifications éprouvées dans un phénomène optique quelconque par le système de vibrations ainsi défini, tels sont les problèmes qui vont nous occuper successivement.

Quelques remarques générales sont utiles avant d'entrer en matière.

Les changements qui, suivant Fresnel, surviennent à des époques très-rapprochées dans l'état vibratoire d'un rayon non polarisé, paraissent quelquefois difficiles à concevoir, mais il ne faut pas beaucoup d'attention pour faire évanouir la difficulté. D'abord, il est deux cas où des molécules rayonnantes diverses se succèdent

(*) On dit le plus souvent que ces deux rayons sont égaux en intensité, mais cela n'est pas théoriquement exact, et même dans les corps fortement biréfringents la différence peut être rendue sensible à l'expérience (voyez les Recherches photométriques de M. Wild, *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. LXIX, p. 238).

(**) La réflexion totale peut être remplacée par le passage de la lumière à travers une lame cristalline à faces parallèles, trop peu épaisse pour séparer l'un de l'autre les deux rayons issus de la double réfraction, et assez faiblement biréfringente pour ne pas établir de différence sensible entre leurs intensités.

incessamment les unes aux autres en un point donné, ce qui a pour conséquence nécessaire le changement de la forme, de l'orientation et de la phase des vibrations : il en est évidemment ainsi lorsque la faculté lumineuse résulte directement d'une action chimique, et lorsque, le corps lumineux étant fluide, les courants intérieurs renouvellent rapidement les molécules superficielles. Si la source lumineuse est un solide porté par l'élévation de température à un état d'incandescence uniforme et constant, l'uniformité et la constance ne sont jamais absolues et résultent en réalité d'un état variable qui oscille rapidement entre des limites très-resserrées, et il n'en faut pas davantage pour faire varier à des instants rapprochés l'état des vibrations émises par la source (*).

Un point important, auquel en général on ne donne aucune attention, c'est que les propriétés de la lumière naturelle s'expliquent aussi bien par la coexistence de vibrations diverses dans un espace très-resserré que de leur succession dans un temps très-court. Soit, par exemple, un gaz incandescent, qui, comme on sait, émet toujours et dans toutes les directions de la lumière non polarisée : à un instant donné, une des molécules du gaz émet des vibrations polarisées d'une manière déterminée; mais une molécule voisine émet des vibrations polarisées d'une autre manière, et à chaque instant il y a compensation exacte entre les polarisations diverses sur une très-petite étendue de la flamme; en sorte que si l'on regarde cette flamme avec un analyseur biréfringent, l'intensité lumineuse est réellement variable d'un point à l'autre dans chaque image à l'instant considéré, mais que ces variations, insensibles à cause de leur grand nombre, donnent l'apparence d'une intensité uniforme indépendante de l'orientation de l'analyseur. La durée de l'incandescence pourrait donc se réduire indéfiniment sans que la lumière émise offrit des traces sensibles de polarisation. Cette considération est peut-être nécessaire dans certains cas pour expliquer l'absence de polarisation de la lumière électrique (**).

(*) Ce qui a besoin réellement d'être expliqué, ce n'est pas que les vibrations émises par une source varient sans cesse, c'est qu'on trouve dans ces vibrations quelque chose de constant, l'intensité et la période. La constance de l'intensité résulte de la constance des causes par lesquelles le rayonnement est entretenu; la constance de la période tient à ce que la période des vibrations est comme l'expression de l'élasticité propre du système moléculaire vibrant, et à ce que ce système ne change pas de nature. C'est ainsi que si l'on avait diverses plaques vibrantes, de nature, de forme et de dimensions identiques, mais diversement orientées dans l'espace et ébranlées à des instants différents, il n'y aurait de commun que la période dans les mouvements vibratoires qu'au même instant elles enverraient en un même point.

(**) Dans les expériences classiques de M. Wheatstone la durée de l'étincelle directe d'une machine électrique a été reconnue inférieure à $\frac{1}{152\,000}$ de seconde. D'un autre côté, M. Fizeau étant parvenu à produire des interférences avec des rayons dont la différence de marche atteignait 50 000 ondulations, on doit admettre que, dans certains cas au moins, les vibrations émises par une source lumineuse peuvent ne pas éprouver d'altération sensible pendant une durée très-supérieure à celle de 50 000 vibrations. Il n'y a

Les compensations entre les polarisations diverses des vibrations émises à un même instant par les divers points d'une même source peuvent avoir lieu d'une autre manière. Si, au moyen d'un diaphragme, on isole une portion du rayonnement d'une source lumineuse de diamètre apparent sensible, il est facile de voir qu'aux divers points d'une section transversale du faisceau ainsi obtenu, l'état de polarisation ne saurait être le même. Supposons pour plus de simplicité une source sphérique σ , et concevons une sphère S de très-grand rayon concentrique à la source : en un point de cette sphère S la vitesse de vibration est à chaque instant la résultante des vitesses envoyées par les divers points de la source; si tous les points de la source avaient des mouvements concordants, les mouvements de tous les points de la sphère S seraient aussi concordants, et on aurait une véritable onde sphérique polarisée de la même manière dans toute son étendue; mais comme les mouvements des divers points de la source diffèrent les uns des autres, la résultante des vitesses qu'ils envoient à un instant donné en un point de la sphère S dépend de la position particulière de ce point. Des calculs très-simples démontrent que l'étendue de la surface sphérique S dans laquelle les mouvements vibratoires peuvent être regardés comme concordants à chaque instant est inférieure à celle d'un cercle qui aurait pour diamètre le quotient de la demi-longueur d'onde par le demi-diamètre apparent de la source vue d'un point de la sphère S , et par conséquent devient très-petite dès que la source a un diamètre apparent sensible (*). Dans le cas du Soleil, le diamètre de ce cercle est d'environ $0^{\text{mm}},055$ pour une lumière de lon-

donc rien d'impossible à ce que la durée de certaines étincelles descende à dix-millionième de seconde, et que le mouvement vibratoire d'un de leurs points ne subisse pas de perturbation pendant la durée d'un million de vibrations. Dans ces conditions, le nombre des alternatives de vibration que pourrait offrir la lumière serait au plus de 60 pour une longueur d'onde égale à $0^{\text{mm}},0005$, puisque pour cette longueur d'onde le nombre des vibrations est d'environ 600 trillions par seconde. Il serait bien difficile qu'un aussi petit nombre d'alternatives suffît à compenser les unes par les autres les diverses polarisations, et il semblerait que la lumière de l'étincelle dût offrir des traces sensibles de polarisation, si l'on n'avait égard aux considérations qu'on a indiquées dans le texte.

(*) Soient

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \rho^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

les équations de la sphère lumineuse σ et de la sphère S qui lui est concentrique; la distance d'un point σ de la source à un point P de S est

$$\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2x\xi - 2y\eta - 2z\zeta}.$$

Si l'on considère sur S un point P' différent de P , dont les coordonnées soient $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$, la distance au point σ devient

$$\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2(x + \Delta x)\xi - 2(y + \Delta y)\eta - 2(z + \Delta z)\zeta}.$$

Si l'on suppose R très-grand par rapport à ρ , et conséquemment aussi par rapport à ξ, η, ζ , ces deux

gueur d'onde égale à $0^{\text{mm}},0005$, et comme son étendue superficielle n'est pas la quatre-centième partie d'un millimètre carré, on voit que sur chaque millimètre carré de la section transversale d'un faisceau solaire il y a, à un instant donné, au moins 400 modes de vibration différents, ce qui peut suffire pour établir la compensation entre les polarisations diverses (*).

expressions se réduisent approximativement à

$$R + \frac{\rho^2}{2R} - \frac{\xi}{R}x - \frac{\eta}{R}y - \frac{\zeta}{R}z,$$

et

$$R + \frac{\rho^2}{2R} - \frac{\xi}{R}(x + \Delta x) - \frac{\eta}{R}(y + \Delta y) - \frac{\zeta}{R}(z + \Delta z),$$

et leur différence à

$$\frac{\xi}{R}\Delta x + \frac{\eta}{R}\Delta y + \frac{\zeta}{R}\Delta z.$$

Si les points P et P' sont tellement rapprochés, que, pour toutes les valeurs de ξ , η , ζ , cette expression soit en valeur absolue une très-petite fraction de longueur d'onde, les mouvements vibratoires élémentaires envoyés par tous les points de la source aux deux points P et P' sont sensiblement identiques, et par suite les mouvements résultants le sont aussi. Considérons pour le moment le point ω en particulier : l'ensemble des points de la sphère S auxquels ce point envoie un mouvement sensiblement identique à celui qu'il envoie en P forme une zone sphérique étroite, limitée par deux plans normaux au rayon de la sphère qui passe par le point ω , menés de part et d'autre de P à des distances exprimées par

$$\frac{h\lambda}{\sqrt{\frac{\xi^2}{R^2} + \frac{\eta^2}{R^2} + \frac{\zeta^2}{R^2}}} = \frac{R}{\rho} h\lambda,$$

h désignant une très-petite fraction. Les points auxquels *tous* les éléments de la source envoient des mouvements sensiblement identiques sont contenus dans la partie commune à ces diverses zones, c'est-à-dire dans une calotte sphérique ne différant pas sensiblement d'un cercle qui aurait pour centre le point P et pour rayon

$$\frac{R}{\rho} h\lambda.$$

C'est dans l'intérieur de ce cercle seulement que les mouvements vibratoires peuvent être considérés comme concordants sur la sphère S. La valeur de la fraction h n'est pas susceptible d'être exactement déterminée, mais elle est certainement moindre que $\frac{1}{4}$, et par conséquent le cercle de diamètre égal à

$$\frac{R}{\rho} \frac{\lambda}{2}$$

est une limite supérieure de l'étendue sur laquelle on peut regarder les mouvements vibratoires comme concordants. $\frac{\rho}{R}$ étant le demi-diamètre apparent de la source vue de la distance R, la proposition contenue dans le texte se trouve démontrée. Ce cercle contient tous les points tels, que la différence de deux d'entre eux à un point quelconque de la source soit moindre qu'une demi-ondulation.

(*) Le défaut de concordance entre les deux vibrations de deux points très-voisins sur la sphère S se constate d'ailleurs par l'impossibilité d'obtenir des franges d'interférence en faisant tomber la lumière d'une source de grand diamètre apparent sur deux fentes étroites, qui donnent des franges très-visibles lorsque la lumière vient d'une source de très-petit diamètre apparent.

Ainsi la succession et la coexistence des vibrations diversement polarisées doivent être prises également en considération pour rendre compte des propriétés de la lumière naturelle, mais il n'est pas nécessaire de traiter à part des effets de ces deux causes, car tout ce qu'on peut dire de l'une peut se répéter de l'autre. On se bornera donc dans cette étude à considérer les effets d'une succession rapide de vibrations diversement polarisées, conformément à l'usage suivi en général, et on sous-entendra toujours l'effet identique de leur juxtaposition dans un espace très-resserré.

III.

Soient, dans un plan perpendiculaire à la direction d'un rayon lumineux non polarisé, deux axes rectangulaires. L'une quelconque des vibrations qui se succèdent en un point du rayon à de très-courts intervalles pourra être représentée par deux équations de la forme

$$x = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha \right), \quad y = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \beta \right),$$

ou, en faisant $2\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha \right) = \varphi$, $2\pi (\beta - \alpha) = \delta$,

$$x = a \sin \varphi, \quad y = b \sin (\varphi + \delta).$$

On n'ôtera rien à la généralité de ces équations, et on rendra la discussion plus facile en supposant que a et b sont toujours positifs, pourvu qu'on regarde δ comme susceptible de recevoir toutes les valeurs comprises entre 0 et 2π : les valeurs comprises entre 0 et π répondront dans cette hypothèse à des vibrations polarisées elliptiquement de gauche à droite, et les vibrations comprises entre π et 2π à des vibrations polarisées elliptiquement de droite à gauche.

Suivant deux autres axes rectangulaires menés dans le même plan, la même vibration elliptique aura pour composantes

$$x' = x \cos \omega + y \sin \omega,$$

$$y' = -x \sin \omega + y \cos \omega;$$

si ω désigne l'angle de l'axe des x' avec l'axe des x , c'est-à-dire en développant les valeurs de x et de y ,

$$x' = (a \cos \omega + b \cos \delta \sin \omega) \sin \varphi + b \sin \delta \sin \omega \cos \varphi,$$

$$y' = (-a \sin \omega + b \cos \delta \cos \omega) \sin \varphi + b \sin \delta \cos \omega \cos \varphi.$$

Si l'on reçoit le rayon normalement sur un cristal biréfringent orienté de telle façon que les plans de vibration des deux rayons auxquels il donne naissance soient

parallèles aux axes des x' et des y' , ces deux rayons seront proportionnels aux intensités des deux composantes représentées par les deux dernières équations, et par conséquent égaux à

$$m^2 (a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega + 2ab \cos \delta \sin \omega \cos \omega)$$

et

$$n^2 (a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega - 2ab \cos \delta \sin \omega \cos \omega),$$

m et n étant deux coefficients très-voisins de l'égalité, mais non exactement égaux (*). Ces expressions dépendent de l'angle ω , mais elles varient d'un instant à l'autre avec les paramètres a , b et δ , et pour que le rayon jouisse de la première propriété de la lumière naturelle, il faut et il suffit que les valeurs moyennes, prises pendant un temps très-court, mais assez long pour contenir un nombre très-grand d'alternatives, soient indépendantes de ω . Donc, en désignant généralement par $M(z)$ la valeur moyenne ainsi définie d'une quantité quelconque z , il faut et il suffit que les expressions

$$M(a^2) \sin^2 \omega + M(b^2) \cos^2 \omega + 2M(ab \cos \delta) \sin \omega \cos \omega$$

et

$$M(a^2) \sin^2 \omega + M(b^2) \cos^2 \omega - 2M(ab \cos \delta) \sin \omega \cos \omega$$

gardent les mêmes valeurs, quel que soit ω , et par suite qu'on ait

$$M(a^2) = M(b^2), \quad M(ab \cos \delta) = 0.$$

La même propriété devant subsister encore après une réflexion totale dans l'intérieur d'un milieu uniréfringent, et en particulier lorsque le plan de réflexion est parallèle ou perpendiculaire à l'axe des x , il faut et il suffit qu'en appelant ϵ la différence de phase qui s'ajoute dans ce cas particulier à la différence δ , on ait, quel que soit ϵ ,

$$M[ab \cos(\delta + \epsilon)] = 0,$$

c'est-à-dire à la fois

$$M(ab \cos \delta) = 0, \quad M(ab \sin \delta) = 0.$$

Ainsi les trois conditions suivantes caractérisent toute succession rapide de vibrations jouissant des propriétés par lesquelles on définit la lumière naturelle :

$$M(a^2) = M(b^2),$$

$$M(ab \cos \delta) = 0,$$

$$M(ab \sin \delta) = 0.$$

(*) L'égalité absolue n'aurait lieu que si les deux ondes planes engendrées par la double réfraction se propageaient avec la même vitesse, c'est-à-dire si en réalité il n'y avait pas double réfraction.

Il n'est pas difficile de prouver que si ces conditions sont satisfaites relativement à deux axes rectangulaires OX et OY, elles le seront par rapport à deux autres axes rectangulaires quelconques OX' et OY'. Si en effet on représente le mouvement vibratoire décomposé suivant ces nouveaux axes par les équations

$$x' = a' \sin \varphi', \quad y' = b' \sin(\varphi' + \delta'),$$

on doit avoir, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} a' \sin \varphi' &= (a \cos \omega + b \cos \delta \sin \omega) \sin \varphi + b \sin \delta \sin \omega \cos \varphi, \\ b' \sin(\varphi' + \delta') &= (-a \sin \omega + b \cos \delta \cos \omega) \sin \varphi + b \sin \delta \cos \omega \cos \varphi, \end{aligned}$$

et par suite, en vertu des règles connues du calcul des interférences,

$$\begin{aligned} a'^2 &= a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega + 2ab \cos \delta \sin \omega \cos \omega, \\ b'^2 &= a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega - 2ab \cos \delta \sin \omega \cos \omega, \\ \text{tang}(\varphi' - \varphi) &= \frac{b \sin \delta \sin \omega}{a \cos \omega + b \cos \delta \sin \omega}, \\ \text{tang}(\varphi' + \delta' - \varphi) &= \frac{b \sin \delta \cos \omega}{-a \sin \omega + b \cos \delta \sin \omega}, \end{aligned}$$

On déduit de là par un calcul facile

$$\begin{aligned} a' b' \cos \delta' &= ab \cos \delta (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) - (a' - b') \sin \omega \cos \omega, \\ a' b' \sin \delta' &= ab \sin \delta, \end{aligned}$$

et il est évident, à l'inspection de ces formules, que

$$\begin{aligned} M(a') &= M(b'), \\ M(a' b' \cos \delta') &= 0, \\ M(a' b' \sin \delta') &= 0. \end{aligned}$$

Un autre mode de représentation des vibrations elliptiques conduit à une autre expression analytique des mêmes conditions, qui peut être quelquefois utile. On considère à un instant donné les axes de l'ellipse décrite par les molécules d'éther, et on prend pour équations des vibrations relativement à ces axes

$$\begin{aligned} \xi &= c \sin \gamma \sin \psi, \\ \eta &= c \cos \gamma \cos \psi, \end{aligned}$$

ψ désignant un arc qui varie proportionnellement à $2\pi \frac{t}{T}$, c un coefficient positif, et $\text{tang} \gamma$ le rapport des axes de l'ellipse; ce rapport est positif ou négatif suivant que la lumière est polarisée elliptiquement de gauche à droite ou de droite à gauche.

Si θ est l'angle que fait l'axe des ξ avec l'axe des x , on a

$$\begin{aligned}x &= \xi \cos \theta - \gamma \sin \theta, \\ \gamma &= \xi \sin \theta + \gamma \cos \theta,\end{aligned}$$

et si l'on pose de nouveau

$$x = a \sin \varphi, \quad \gamma = b \sin(\varphi + \delta),$$

des règles connues donnent

$$\begin{aligned}a &= c \sqrt{\sin^2 \gamma \cos^2 \theta + \cos^2 \gamma \sin^2 \theta}, \\ b &= c \sqrt{\sin^2 \gamma \sin^2 \theta + \cos^2 \gamma \cos^2 \theta}, \\ \text{tang}(\varphi - \psi) &= -\cot \gamma \text{tang} \theta, \\ \text{tang}(\varphi + \delta - \psi) &= \cot \gamma \cot \theta,\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}ab \cos \delta &= -c^2 \cos 2\gamma \sin \theta \cos \theta, \\ ab \sin \delta &= c^2 \cos \gamma \sin \gamma.\end{aligned}$$

Les conditions précédentes deviennent donc

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(c^2 \sin^2 \gamma \cos^2 \theta + c^2 \cos^2 \gamma \sin^2 \theta) &= \mathbf{M}(c^2 \sin^2 \gamma \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \gamma \cos^2 \theta), \\ \mathbf{M}(c^2 \cos 2\gamma \sin \theta \cos \theta) &= 0, \\ \mathbf{M}(c^2 \cos \gamma \sin \gamma) &= 0,\end{aligned}$$

ou, par des transformations évidentes,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(c^2 \cos 2\gamma \cos 2\theta) &= 0, \\ \mathbf{M}(c^2 \cos 2\gamma \sin 2\theta) &= 0, \\ \mathbf{M}(c^2 \sin 2\gamma) &= 0.\end{aligned}$$

C'est sous cette dernière forme que M. Stokes les a présentées.

IV.

Ces conditions peuvent être satisfaites d'une infinité de manières qu'il est inutile de spécifier, mais il est intéressant de rechercher quelle est la combinaison de vibrations la plus simple qui les satisfasse. Une vibration à polarisation constante ayant des propriétés parfaitement distinctes de celles de la lumière naturelle, il faut au moins deux espèces de vibrations diverses alternant l'une avec l'autre. Soient a_1 , b_1 , δ_1 et a_2 , b_2 , δ_2 les paramètres caractéristiques des deux vibrations, τ la durée pour laquelle on prend la moyenne des expressions a^2 , b^2 , $ab \cos \delta$, $ab \sin \delta$, m_1 et m_2 les fractions de cette durée qui appartiennent aux deux modes de vibra-

tion, on aura

$$\begin{aligned} M(a^2) &= m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2, \\ M(b^2) &= m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2, \\ M(ab \cos \delta) &= m_1 a_1 b_1 \cos \delta_1 + m_2 a_2 b_2 \cos \delta_2, \\ M(ab \sin \delta) &= m_1 a_1 b_1 \sin \delta_1 + m_2 a_2 b_2 \sin \delta_2; \end{aligned}$$

et par suite, si la succession alternante de ces deux rayons possède les propriétés de la lumière naturelle,

$$\begin{aligned} m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 &= m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2, \\ m_1 a_1 b_1 \cos \delta_1 + m_2 a_2 b_2 \cos \delta_2 &= 0, \\ m_1 a_1 b_1 \sin \delta_1 + m_2 a_2 b_2 \sin \delta_2 &= 0. \end{aligned}$$

On déduit immédiatement des deux dernières équations

$$\tan \delta_1 = \tan \delta_2,$$

c'est-à-dire $\delta_1 = \delta_2$ ou $\delta_1 = \pi + \delta_2$. La première hypothèse conduit immédiatement à $b_1 = 0, a_2 = 0$ ou à $b_2 = 0, a_1 = 0$, c'est-à-dire à deux rayons polarisés à angle droit l'un sur l'autre, dont les intensités a_1^2 et b_2^2 sont en raison inverse de leurs durées. La seconde hypothèse indique que les deux vibrations doivent être polarisées elliptiquement en sens contraires, et donne de plus la condition

$$m_1 a_1 b_1 = m_2 a_2 b_2;$$

en la combinant avec la première, on trouve aisément

$$\begin{aligned} m_1 m_2 a_1^2 a_2^2 + m_1^2 a_1^4 &= m_1 m_2 a_2^2 b_1^2 + m_1^2 a_1^2 b_1^2, \\ (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2)(m_2 a_2^2 - m_1 b_1^2) &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$m_1 b_1^2 = m_2 a_2^2,$$

et par suite

$$m_1 a_1^2 = m_2 b_2^2.$$

Les équations des deux rayons dont l'alternance peut constituer de la lumière naturelle sont donc

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin \varphi, & x_2 &= b_1 \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \sin \varphi, \\ y_1 &= b_1 \sin(\varphi + \delta_1), & y_2 &= -a_1 \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \sin(\varphi + \delta_1). \end{aligned}$$

Il est évident que les deux vibrations ainsi définies sont polarisées elliptiquement en sens contraires, qu'elles s'exécutent suivant des ellipses semblables, mais tellement orientées, que le grand axe de l'une coïncide avec le petit axe de l'autre, et

enfin que leurs intensités sont en raison inverse de leurs durées relatives. Cette solution comprend comme cas particulier la précédente, car deux vibrations rectilignes perpendiculaires l'une à l'autre peuvent être regardées comme deux ellipses semblables placées de manière que le grand axe de l'une coïncide avec le petit axe de l'autre; en outre, comme dans des vibrations rectilignes il n'y a rien d'analogue aux deux sens de la polarisation elliptique, on peut toujours les assimiler à deux vibrations elliptiques de polarisations opposées.

En ayant égard à cette remarque on peut énoncer comme il suit le résultat des calculs précédents :

La lumière naturelle peut résulter de l'alternance de deux espèces de vibrations elliptiques seulement,

1° Pourvu que les intensités de ces vibrations soient en raison inverse de leurs durées;

2° Que l'une des vibrations puisse être considérée comme dérivée de l'autre par une rotation de 90 degrés et par une réduction des axes dans un rapport déterminé;

3° Que les deux polarisations elliptiques soient d'espèces contraires.

M. Stokes a proposé d'appeler *rayons contrairement polarisés* deux rayons polarisés elliptiquement qui présentent l'un avec l'autre les relations (2°) et (3°). En adoptant cette définition, on peut dire que le moyen le plus simple d'obtenir de la lumière naturelle consiste à faire alterner l'un avec l'autre deux rayons contrairement polarisés, les durées de leurs alternatives étant inversement proportionnelles à leurs intensités. Un nombre quelconque de couples de rayons contrairement polarisés satisfaisant à ces conditions est encore une solution du problème (*).

V.

Le théorème qu'on vient de démontrer donne une infinité de manières de constituer de la lumière naturelle; mais il y en a encore une infinité d'autres, sur lesquelles on présentera quelques remarques générales.

Considérons d'abord un système de $p - 1$ vibrations rectilignes, entièrement arbitraires. Le système satisfera toujours à l'une des conditions caractéristiques de la lumière naturelle, puisque, δ ne pouvant être égal qu'à 0 ou à π , on aura nécessairement

$$M(ab \sin \delta) = 0.$$

Désignons maintenant par A, B, C les valeurs des trois expressions $M(a^2)$, $M(b^2)$,

(*) La considération des rayons contrairement polarisés s'offre d'elle-même dans l'étude de la double réfraction du quartz. M. Stokes a fait remarquer que ces couples de rayons jouissent exclusivement de la propriété curieuse de donner par leur superposition une intensité indépendante de la différence de marche.

$M(ab \cos \delta)$; c'est-à-dire, faisons

$$\begin{aligned} m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + \dots + m_{p-1} a_{p-1}^2 &= A, \\ m_1 a_1^2 + m_1 b_1^2 + \dots + m_{p-1} b_{p-1}^2 &= B, \\ \pm m_1 a_1 b_1 \pm m_2 a_2 b_2 \pm \dots \pm m_{p-1} a_{p-1} b_{p-1} &= C; \end{aligned}$$

pour que le système jouisse des propriétés de la lumière naturelle, il suffira d'ajouter à ce groupe une $p^{i\text{ème}}$ vibration définie par les paramètres a_p , b_p , m_p , et satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} m_p a_p^2 + A &= m_p b_p^2 + B, \\ \pm m_p a_p b_p + C &= 0, \end{aligned}$$

ce qui a lieu si $m_p a_p^2$, $m_p b_p^2$ sont respectivement les racines positives des équations

$$\begin{aligned} z^2 + (A - B)z - C &= 0, \\ z^2 - (A - B)z - C &= 0, \end{aligned}$$

et si l'on fait $\delta = 0$ ou $\delta = \pi$, suivant que C est négatif ou positif. Il y a donc une infinité de manières de constituer de la lumière naturelle avec des vibrations rectilignes, sans qu'il soit nécessaire que ces vibrations se répartissent en groupes de rayons contrairement polarisés.

Un calcul semblable montrerait qu'il y a aussi une infinité de manières de constituer de la lumière polarisée avec des vibrations elliptiques d'une forme déterminée, et *à fortiori* avec des vibrations elliptiques de formes diverses. Il est toujours nécessaire que dans ces divers systèmes les deux espèces opposées de vibrations elliptiques existent simultanément, car avec des vibrations elliptiques d'une seule espèce on pourra satisfaire aux conditions

$$M(a^2) = M(b^2), \quad M(ab \cos \delta) = 0,$$

mais non à la condition

$$M(ab \sin \delta) = 0,$$

$ab \sin \delta$ étant toujours positif ou toujours négatif, suivant que, δ étant compris entre 0 et π , ou entre π et 2π , les vibrations sont polarisées de gauche à droite ou de droite à gauche.

M. Dove a effectivement observé que si l'on fait tourner rapidement un prisme de Nicol sur lequel arrive de la lumière naturelle, le faisceau émergent a toutes les propriétés de la lumière naturelle; mais si l'on fait tourner avec la même vitesse et dans le même sens que le prisme de Nicol une lame de mica, le faisceau émergent, formé de vibrations elliptiques identiques dirigées dans tous les azimuts, produit les mêmes phénomènes de polarisation chromatique qu'un faisceau polarisé

circulairement (*). Pour obtenir de la lumière naturelle il aurait fallu laisser le prisme de Nicol immobile et faire tourner la lame de mica, ce qui aurait changé le sens de la polarisation elliptique à chaque demi-révolution.

Au point de vue d'une théorie tout à fait rigoureuse, ces expériences de M. Dove sont plutôt une imitation des propriétés de la lumière naturelle qu'une reproduction exacte de sa constitution. Un rayon polarisé dont le plan de polarisation tourne avec une vitesse uniforme doit être, ainsi que l'a fait remarquer M. Airy (**), considéré comme étant réellement la superposition de deux rayons polarisés circulairement en sens contraires, dont les périodes de vibration ne sont pas les mêmes. Soient en effet

$$x = a \cos \omega \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha \right),$$

$$y = a \sin \omega \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha \right),$$

les équations d'une vibration rectiligne qui fait avec l'axe des x un angle ω ; si l'on suppose que ω varie proportionnellement au temps, en sorte que $\omega = \mu + \nu t$, on aura

$$x = a \cos(\mu + \nu t) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha \right),$$

$$y = a \sin(\mu + \nu t) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha \right),$$

et par une transformation connue,

$$x = \frac{a}{2} \sin \left[\left(\frac{2\pi}{T} + \nu \right) t + 2\pi\alpha + \mu \right] + \frac{a}{2} \sin \left[\left(\frac{2\pi}{T} - \nu \right) t + 2\pi\alpha - \mu \right],$$

$$y = -\frac{a}{2} \cos \left[\left(\frac{2\pi}{T} + \nu \right) t + 2\pi\alpha + \mu \right] + \frac{a}{2} \cos \left[\left(\frac{2\pi}{T} - \nu \right) t + 2\pi\alpha - \mu \right],$$

et ces équations représentent évidemment la combinaison de deux vibrations circulaires de périodes différentes définies par les deux groupes d'équations

$$x_1 = \frac{a}{2} \sin \left[\left(\frac{2\pi}{T} + \nu \right) t + 2\pi\alpha + \mu \right],$$

$$y_1 = -\frac{a}{2} \cos \left[\left(\frac{2\pi}{T} + \nu \right) t + 2\pi\alpha + \mu \right],$$

et

$$x_2 = \frac{a}{2} \sin \left[\left(\frac{2\pi}{T} - \nu \right) t + 2\pi\alpha - \mu \right],$$

$$y_2 = \frac{a}{2} \cos \left[\left(\frac{2\pi}{T} - \nu \right) t + 2\pi\alpha - \mu \right].$$

(*) POGGENDORFF's *Annalen*, t. LXXI, p. 97.

(**) *Undulatory theory of Light*, art. 185 (3^e édition).

Les mêmes remarques s'appliquent aux deux composantes d'une vibration elliptique, et par conséquent à la vibration elliptique elle-même.

Mais dans toute expérience du genre de celle de M. Dove la décomposition d'un faisceau polarisé tournant en deux faisceaux de périodes diverses, et par conséquent différemment réfrangibles et différemment colorés, est absolument inappréciable. Les nombres de vibrations de ces deux faisceaux sont représentés par $\frac{1}{T} + \frac{\nu}{2\pi}$ et $\frac{1}{T} - \frac{\nu}{2\pi}$, c'est-à-dire, si l'on suppose que le prisme de Nicol fasse 1000 révolutions par seconde, sont entre eux comme 600 billions plus l'unité et 600 billions moins l'unité, pour une lumière de longueur d'onde égale à 0^{mm},0005. Il n'y a aucun moyen d'établir entre de pareils rayons une séparation sensible. Une vitesse d'un million de tours par seconde serait encore très-éloignée d'être suffisante.

On reproduirait encore les propriétés de la lumière naturelle en faisant tourner un prisme de Nicol au devant d'un parallépipède de Fresnel qui établit une différence de phase d'un quart de circonférence entre la composante du mouvement vibratoire parallèle au plan de réflexion, et la composante perpendiculaire. La vibration rectiligne issue du prisme de Nicol serait ainsi transformée en une vibration elliptique dont les axes auraient une situation fixe, mais où le rapport des axes prendrait successivement toutes les valeurs possibles et où la direction du mouvement changerait à chaque demi-révolution. Cette expérience donnerait lieu aux mêmes remarques que l'expérience de M. Dove. Si le prisme de Nicol accomplissait n révolutions par seconde, on aurait, pour représenter à chaque instant le mouvement vibratoire, les deux équations

$$\begin{aligned} x &= a \cos 2\pi n t \sin 2\pi \frac{t}{T}, \\ y &= a \sin 2\pi n t \cos 2\pi \frac{t}{T}, \end{aligned}$$

et le même mode de transformation donnerait

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{1}{T} + n \right) t + \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{1}{T} - n \right) t, \\ y &= \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{1}{T} + n \right) t - \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{1}{T} - n \right) t, \end{aligned}$$

ce qui permettrait de regarder le système comme résultant de la superposition de deux vibrations rectilignes de périodes différentes polarisées à angle droit, définies par les groupes d'équations

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{1}{T} + n \right) t, \\ y_1 &= \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{1}{T} + n \right) t, \end{aligned}$$

et

$$x_1 = \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{1}{T} - n \right) t,$$

$$y_1 = -\frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{1}{T} - n \right) t.$$

Dans toute expérience réelle cette remarque serait d'ailleurs sans importance.

Ces développements conduisent à une conséquence curieuse que M. Airy a sommairement indiquée sans la démontrer en détail, c'est que les changements qu'éprouvent dans la lumière naturelle la forme et l'orientation des ellipses de vibration ne peuvent être supposés continus si la lumière est absolument homogène. Tout changement continu d'une vibration elliptique consiste en effet en une série de rotations infiniment petites des axes de l'ellipse, accompagnées d'altérations infiniment petites simultanées du rapport des grandeurs des axes, et chacune de ces altérations élémentaires elles-mêmes peut être censée résulter de la combinaison de mouvements vibratoires de longueur d'ondulations différentes. L'homogénéité absolue de la lumière n'est donc compatible qu'avec des changements tout à fait brusques et discontinus; une homogénéité sensiblement équivalente à l'homogénéité absolue admet des changements continus très-lents par rapport aux vibrations de la lumière; mais des changements continus qui s'accompliraient avec une vitesse comparable à celle du mouvement vibratoire résulteraient en réalité de la superposition de rayons diversement réfrangibles en même temps que diversement polarisés.

A une époque récente, un physicien allemand, M. Lippich, a prétendu qu'il n'y avait d'autre lumière polarisée que la lumière hétérogène, et que les apparences de la lumière naturelle sont dues à la combinaison de deux ou plusieurs rayons de longueurs d'ondes différentes. Les développements donnés dans ce Mémoire me paraissent suffisants pour établir qu'il est inutile, pour rendre compte des faits observés, d'avoir recours à une théorie aussi paradoxale (*).

VI.

Un autre physicien allemand, M. Stefan, a cru démontrer par l'expérience que la lumière naturelle ne contenait que des vibrations rectilignes, à l'exclusion des vibrations circulaires ou elliptiques(**). Sa démonstration n'est pas exacte, mais

(*) Le Mémoire de M. Lippich a été publié dans les *Comptes rendus de l'Académie de Vienne* pour 1863.

(**) Voyez les *Comptes rendus de l'Académie de Vienne* pour 1863, les *Annales de Poggendorff*, 4^e livraison de 1865, et les *Mondes*, livraison du 2 juin 1865.

l'importance que l'Académie de Vienne a donnée au Mémoire de M. Stefan en le couronnant ne permet pas d'en négliger l'examen.

On peut d'abord remarquer que l'assertion de M. Stefan ne saurait être prise pour absolue, et ne pourrait s'appliquer tout au plus qu'à des lumières d'origine déterminée, mais non à toute espèce de lumière non polarisée. Quand bien même il serait vrai, par exemple, que la lumière solaire ne contient que des vibrations rectilignes, en la faisant réfléchir totalement dans un parallépipède de Fresnel, on transformerait ces vibrations rectilignes en vibrations elliptiques, sans lui faire perdre les propriétés caractéristiques de la lumière naturelle. Au reste, M. Stefan paraît avoir lui-même senti cette difficulté, car il a soin de mentionner les sources de lumière qu'il a soumises à l'expérience (lumière solaire, lumière Drummond, lumière d'une lampe ordinaire, lumière dépolarisée par diffusion), et il annonce l'intention d'étendre ses recherches à d'autres sources.

Mais la conclusion que M. Stefan a prétendu tirer de ses expériences est fondée sur un raisonnement inexact, quoique peut-être spécieux. M. Stefan remarque d'abord, ce qui est parfaitement juste, que si l'on divise en deux parties un faisceau polarisé rectilignement, et qu'on fasse tourner de 90 degrés le plan de polarisation d'une des parties, il est impossible de produire des phénomènes d'interférence par la réunion ultérieure des deux faisceaux ainsi obtenus, tandis que, si l'on effectue une expérience analogue sur la lumière polarisée elliptiquement, la possibilité d'interférer subsiste, le résultat de la rotation de 90 degrés n'étant que d'amener le petit axe des ellipses de l'un des faisceaux sur le grand axe des ellipses de l'autre, et *vice versa*; sur la lumière polarisée circulairement, une rotation de 90 degrés est évidemment sans aucun effet. De là l'expérience suivante : Soit le système d'un collimateur, d'un prisme et d'une lunette donnant un spectre bien pur et bien net. Si l'on recouvre d'une plaque de verre la moitié de l'objectif du collimateur ou de la lunette qui est tournée du côté de l'arête réfringente du prisme, le spectre devient sillonné de bandes noires équidistantes, dont les lois ne peuvent s'établir rigoureusement que par une théorie assez compliquée (*), mais qui résultent en définitive de la différence de marche établie par la plaque entre les deux moitiés du faisceau lumineux. Si l'on substitue à la plaque de verre une plaque de quartz perpendiculaire à l'axe, qui fasse tourner de 90 degrés le plan de polarisation des rayons d'une longueur d'onde déterminée, les vibrations rectilignes qui peuvent entrer dans la composition de la lumière naturelle ne contribueront plus à la formation des bandes d'interférence dans la région correspondante du spectre; il semble au contraire que les vibrations elliptiques devront

(*) Voyez le Mémoire de M. Stokes sur la théorie de certaines bandes vues dans le spectre, dans les *Transactions philosophiques* pour 1848.

continuer d'interférer d'une manière plus ou moins sensible. M. Stefan ayant vu les franges disparaître dans cette région (*) et devenir d'autant plus intenses qu'on s'en écartait davantage jusqu'à la région où la rotation atteignait 180 degrés, il en a conclu qu'il n'y avait dans la lumière naturelle que des vibrations rectilignes.

L'erreur de ce raisonnement consiste dans la confusion des effets des vibrations elliptiques polarisées en sens opposés. Il est facile de voir en effet que si dans la région du spectre correspondante à la rotation de 90 degrés les vibrations elliptiques polarisées de droite à gauche doivent donner en un certain point un maximum d'intensité, les vibrations elliptiques polarisées de gauche à droite doivent donner au même point un minimum, et *vice versa*; de sorte que s'il y a dans la lumière naturelle compensation exacte entre les deux espèces opposées de vibrations, aucune bande d'interférence ne doit être visible. Soient

$$\xi = a \sin \varphi, \quad \eta = b \cos \varphi,$$

a et b étant supposés de même signe, les équations d'un rayon polarisé elliptiquement de gauche à droite. Si l'ellipse des vibrations tourne de 90 degrés vers la droite dans son plan, ces équations deviennent

$$\xi' = b \cos \varphi, \quad \eta' = -a \sin \varphi;$$

enfin, si les rayons définis par ces deux systèmes d'équations viennent concourir au même point, après qu'il s'est établi entre eux une différence de phase δ , les équations du mouvement résultant sont

$$x = \xi + \xi' = a \sin \varphi + b \cos(\varphi - \delta),$$

$$y = \eta + \eta' = b \cos \varphi - a \sin(\varphi - \delta),$$

et les règles ordinaires de l'interférence donnent pour l'intensité correspondante

$$2(a^2 + b^2 + 2ab \sin \delta).$$

Si l'on fait un calcul semblable sur la lumière polarisée elliptiquement de gauche à droite, on doit changer le signe d'un des coefficients a ou b , et l'expression à laquelle on parvient est

$$2(a^2 + b^2 - 2ab \cos \delta);$$

et il est clair que la moyenne des deux intensités ainsi déterminées, savoir :

$$2(a^2 + b^2),$$

(*) Avec la plaque de quartz dont M. Stefan faisait usage, cette région était entre la raie C et la raie D, mais très-voisine de la raie C.

est indépendante de la différence de phase δ . Par conséquent, toute lumière où il y aura compensation entre les deux espèces opposées de polarisation elliptique ne donnera aucune frange d'interférence dans une expérience pareille à celle de M. Stefan. Il est donc inutile de rien changer à l'idée qu'on se fait généralement de la lumière naturelle.

VII.

Lorsqu'un faisceau de lumière naturelle est soumis à une action qui modifie dans des rapports différents les intensités des composantes du mouvement vibratoire parallèles à deux plans rectangulaires, on dit que le faisceau résultant est *partiellement polarisé* (*). Le plan parallèle à la composante dont l'intensité est devenue la plus faible s'appelle le *plan de polarisation partielle*.

Or, si l'on représente par a' et b' dans le faisceau modifié les analogues de a et de b dans le faisceau naturel primitif, par p et q les rapports constants $\frac{a'}{a}$, $\frac{b'}{b}$, on aura

$$M(a'^2) = p^2 M(a^2), \quad M(b'^2) = q^2 M(b^2),$$

et comme $M(a^2) = M(b^2)$, puisque le faisceau primitif n'est pas polarisé, $M(a'^2)$ et $M(b'^2)$ auront des valeurs différentes. D'ailleurs on aura évidemment

$$\begin{aligned} M(a' b' \cos \delta) &= pq M(ab \cos \delta) = 0, \\ M(a' b' \sin \delta) &= pq M(ab \sin \delta) = 0. \end{aligned}$$

Donc les vibrations diverses qui par leur succession constituent un rayon partiellement polarisé doivent satisfaire aux équations suivantes, où A et B désignent deux nombres quelconques différents l'un de l'autre,

$$\begin{aligned} M(a'^2) &= A, \\ M(b'^2) &= B, \\ M(ab \cos \delta) &= 0, \\ M(ab \sin \delta) &= 0, \end{aligned}$$

lorsque les axes coordonnés sont l'un parallèle et l'autre perpendiculaire au plan de polarisation partielle.

Lorsqu'on change la direction des axes coordonnés, on a, en vertu des calculs

(*) Il est indifférent qu'en même temps que les intensités des composantes se modifient dans des rapports différents, une quantité constante s'ajoute à leur différence de phase, car cette addition laisse à la lumière naturelle toutes ses propriétés.

310 ÉTUDE SUR LA CONSTITUTION DE LA LUMIÈRE NON POLARISÉE
développés à l'article III, ω étant l'angle de l'axe des x' avec l'axe des x ,

$$\begin{aligned}M(a'^2) &= M(a^2) \cos^2 \omega + M(b^2) \sin^2 \omega, \\M(b'^2) &= M(a^2) \sin^2 \omega + M(b^2) \cos^2 \omega, \\M(a'b' \cos \delta') &= [M(b^2) - M(a^2)] \sin \omega \cos \omega, \\M(a'b' \sin \delta') &= 0.\end{aligned}$$

Réciproquement, si une succession de vibrations est telle, qu'on ait

$$M(ab \sin \delta) = 0,$$

cette succession constitue un faisceau partiellement polarisé. Soient en effet A, B, C, les valeurs des trois expressions $M(a^2)$, $M(b^2)$, $M(ab \cos \delta)$, A', B', C', ce que deviennent ces expressions lorsqu'on passe du système donné d'axes rectangulaires à un autre système défini par l'angle ω compris entre l'axe des x' et l'axe des x , on aura

$$\begin{aligned}A' &= A \cos^2 \omega + B \sin^2 \omega + 2C \sin \omega \cos \omega, \\B' &= A \sin^2 \omega + B \cos^2 \omega - 2C \sin \omega \cos \omega, \\C' &= C (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) - (A - B) \sin \omega \cos \omega,\end{aligned}$$

et on trouvera toujours deux valeurs de ω différentes entre elles de 90 degrés, telles que $C' = 0$, en résolvant l'équation

$$\tan^2 \omega + \frac{A - B}{C} \tan \omega - 1 = 0.$$

L'une de ces directions sera parallèle et l'autre perpendiculaire au plan de polarisation partielle. On donnera plus loin les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients A, B, C pour convenir à un système réel de vibrations.

Les axes coordonnés étant l'un parallèle et l'autre perpendiculaire au plan de polarisation partielle, le faisceau polarisé partiellement est entièrement défini par les coefficients $A = M(a^2)$, $B = M(b^2)$. En posant $A = B + A - B$, si A est plus grand que B, on peut considérer le faisceau polarisé partiellement comme constitué par un groupe de vibrations d'où résulterait un faisceau naturel d'intensité égale à 2B, et un groupe de vibrations rectilignes d'intensité égale à A - B, polarisées dans le plan de polarisation partielle. L'expression de faisceau partiellement polarisé se trouve ainsi justifiée.

VIII.

Les calculs développés dans l'article III de ce Mémoire conduisent encore aux deux conséquences suivantes :

Premièrement, les valeurs moyennes des composantes parallèles à deux axes

rectangulaires d'un système quelconque de vibrations dépendent des valeurs moyennes A et B relatives à deux axes donnés, et d'un troisième coefficient $C = M(ab \cos \delta)$. L'action d'un analyseur biréfringent sur le système des vibrations est donc entièrement déterminée par ces trois coefficients.

En second lieu, si l'on ajoute à chaque instant une quantité arbitraire constante à la différence des phases de ces deux composantes au moyen de la réflexion totale ou du passage à travers une lame cristalline; le coefficient C change de valeur et sa variation dépend d'un quatrième coefficient $D = M(ab \sin \delta)$.

Par conséquent, si les valeurs de ces quatre coefficients sont connues, toutes les modifications que pourra éprouver le système par réflexion, réfraction, double réfraction sont entièrement déterminées, et deux systèmes pour lesquels ces coefficients ont les mêmes valeurs jouissent de propriétés tellement identiques, qu'aucun des phénomènes qu'on vient d'énumérer ne permet de les distinguer l'un de l'autre.

Il existe encore un mode particulier d'analyse de la lumière, très-peu usité pratiquement, mais d'une grande importance théorique, consistant à recevoir la lumière sur un cristal doué de pouvoir rotatoire qui la décompose généralement en deux rayons à vibrations elliptiques contrairement polarisées. Le calcul suivant fait voir que, soumis à ce mode d'analyse, deux systèmes de vibrations diversement polarisées, pour lesquels les quatre coefficients A, B, C, D ont les mêmes valeurs, produisent encore les mêmes effets. Soient toujours, à un instant donné,

$$\begin{aligned}x &= a \sin \varphi, \\ \gamma &= b \sin(\varphi + \delta)\end{aligned}$$

les équations d'une vibration particulière. Décomposons cette vibration en deux vibrations elliptiques contrairement polarisées et telles, que le grand axe de l'une fasse un angle ω avec l'axe des x . Rapportées à leurs axes, les équations de ces vibrations elliptiques seront de la forme

$$\begin{aligned}\xi &= c \sin \gamma \sin(\varphi + \theta), \\ \eta &= c \cos \gamma \cos(\varphi + \theta),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\xi' &= c' \cos \gamma \sin(\varphi + \theta'), \\ \eta' &= -c' \sin \gamma \cos(\varphi + \theta'),\end{aligned}$$

et pour qu'elles reproduisent par leur superposition la vibration donnée, il faudra que

$$\begin{aligned}x \cos \omega + \gamma \sin \omega &= \xi + \xi', \\ -x \sin \omega + \gamma \cos \omega &= \eta + \eta',\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en développant chaque équation et égalant les coefficients de $\sin \varphi$ et

312 ÉTUDE SUR LA CONSTITUTION DE LA LUMIÈRE NON POLARISÉE.
de $\cos\phi$ dans les deux membres de chacune d'elles,

$$\begin{aligned} a \cos \omega + b \cos \delta \sin \omega &= c \cos \theta \sin \gamma + c' \cos \theta' \cos \gamma, \\ b \sin \delta \sin \omega &= c \sin \theta \sin \gamma + c' \sin \theta' \cos \gamma, \\ -a \sin \omega + b \cos \delta \cos \omega &= -c \sin \theta \cos \gamma + c' \sin \theta' \sin \gamma, \\ b \sin \delta \cos \omega &= c \cos \theta \cos \gamma - c' \cos \theta' \sin \gamma. \end{aligned}$$

On déduit de là, par des calculs faciles,

$$\begin{aligned} c \cos \theta &= a \sin \gamma \cos \omega + b \cos \delta \sin \gamma \sin \omega + b \sin \delta \cos \gamma \cos \omega, \\ c \sin \theta &= b \sin \delta \sin \gamma \sin \omega + a \cos \gamma \sin \omega - b \cos \delta \cos \gamma \cos \omega, \\ c^2 &= \cos^2 \gamma (a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega - 2ab \cos \delta \sin \omega \cos \omega) \\ &\quad + \sin^2 \gamma (a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega + 2ab \cos \delta \sin \omega \cos \omega) \\ &\quad + 2 \sin \gamma \cos \gamma ab \sin \delta (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega); \\ c' \cos \theta' &= a \cos \gamma \cos \omega + b \cos \delta \cos \gamma \sin \omega - b \sin \delta \sin \gamma \cos \omega, \\ c' \sin \theta' &= b \sin \delta \cos \gamma \sin \omega - a \sin \gamma \sin \omega + b \cos \delta \sin \gamma \cos \omega, \\ c'^2 &= \cos^2 \gamma (a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega + 2ab \cos \delta \sin \omega \cos \omega) \\ &\quad + \sin^2 \gamma (a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega - 2ab \cos \delta \sin \omega \cos \omega) \\ &\quad - 2 \sin \gamma \cos \gamma ab \sin \delta (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega). \end{aligned}$$

Si l'on reçoit le rayon lumineux considéré sur un cristal à double réfraction elliptique tellement choisi, que, dans les vibrations elliptiques des deux rayons auxquels il donne naissance, le rapport des axes soit égal à $\tan \gamma$, les intensités de ces rayons seront respectivement égales aux produits de c^2 et de c'^2 par des coefficients très-voisins de l'égalité, et leurs intensités moyennes seront proportionnelles à $M(c^2)$ et $M(c'^2)$, c'est-à-dire à

$$\begin{aligned} &\cos^2 \gamma (A \sin^2 \omega + B \cos^2 \omega - 2C \sin \omega \cos \omega) + \sin^2 \gamma (A \cos^2 \omega + B \sin^2 \omega + 2C \sin \omega \cos \omega) \\ &\quad + 2 \sin \gamma \cos \gamma D (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\cos^2 \gamma (A \cos^2 \omega + B \sin^2 \omega + 2C \sin \omega \cos \omega) + \sin^2 \gamma (A \sin^2 \omega + B \cos^2 \omega - 2C \sin \omega \cos \omega) \\ &\quad - 2 \sin \gamma \cos \gamma D (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega). \end{aligned}$$

Elles ne dépendront donc que de A, B, C, D.

Ainsi tous les systèmes de vibrations où les quatre coefficients A, B, C, D ont les mêmes valeurs ont exactement les mêmes propriétés et ne peuvent être distingués les uns des autres par aucun moyen. On peut donc, avec M. Stokes, les appeler *systèmes équivalents*.

IX.

Une seule question reste encore à examiner, celle de savoir si les divers systèmes de vibrations caractérisés par des valeurs diverses des coefficients A, B, C, D peuvent se répartir en un petit nombre de groupes, présentant chacun un ensemble de propriétés communes, ou s'il faut se borner dans chaque cas particulier à déterminer, par une application des méthodes précédentes, les propriétés des divers systèmes qu'on rencontrera.

Il faut remarquer d'abord qu'à tout système de valeurs numériques des coefficients A, B, C, D ne répond pas nécessairement un système possible de vibrations diversement polarisées. Il est bien évident, par exemple, que les coefficients C et D ne sauraient être tous deux très-grands par rapport aux coefficients A et B. Il est même facile de démontrer qu'on a nécessairement, dans tout système réel de vibrations,

$$AB - (C^2 + D^2) > 0.$$

En effet, si l'on reprend les notations de l'article IV, on a

$$AB = (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + \dots)(m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2 + \dots),$$

$$C^2 + D^2 = (m_1 a_1 b_1 \cos \delta_1 + m_2 a_2 b_2 \cos \delta_2 + \dots)^2 + (m_1 a_1 b_1 \sin \delta_1 + m_2 a_2 b_2 \sin \delta_2 + \dots)^2,$$

et on groupe aisément les termes de ces deux expressions de manière à leur donner la forme suivante :

$$\begin{aligned} AB &= m_1^2 a_1^2 b_1^2 + m_2^2 a_2^2 b_2^2 + \dots + m_1 m_2 (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2) + \dots + m_p m_q (a_p^2 b_q^2 + a_q^2 b_p^2) + \dots, \\ C^2 + D^2 &= m_1^2 a_1^2 b_1^2 + m_2^2 a_2^2 b_2^2 + \dots + m_1 m_2 a_1 b_2 a_2 b_1 \cos(\delta_1 - \delta_2) \\ &\quad + m_p m_q a_p b_q a_q b_p \cos(\delta_p - \delta_q) + \dots \end{aligned}$$

Il en résulte que $AB - (C^2 + D^2)$ se réduit à une somme de termes de la forme

$$m_p m_q [a_p^2 b_q^2 + a_q^2 b_p^2 - a_p a_q b_p b_q \cos(\delta_p - \delta_q)];$$

or chacun de ces termes est évidemment plus grand que

$$m_p m_q (a_p b_q - a_q b_p)^2,$$

c'est-à-dire qu'une quantité qui est toujours nulle ou positive. $AB - (C^2 + D^2)$ est donc nécessairement nul ou positif.

Si d'abord on suppose $AB - (C^2 + D^2)$ égal à zéro, le système est équivalent à une vibration unique, invariable de forme, de grandeur et de position, car en faisant

$$a^2 = A, \quad b^2 = B, \quad \tan \delta = \frac{D}{C},$$

on a

$$ab \cos \delta = \sqrt{AB} \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}} = C,$$

$$ab \sin \delta = \sqrt{AB} \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}} = D.$$

Si AB est plus grand que $C^2 + D^2$, il y a une infinité de systèmes satisfaisant aux conditions

$$M(a') = A, \quad M(b') = B, \quad M(ab \cos \delta) = C, \quad M(ab \sin \delta) = D.$$

En effet, AB étant plus grand que $C^2 + D^2$, on peut trouver une infinité de groupes de nombres A' et B' tels, que l'on ait

$$A' < A, \quad B' < B, \quad A'B' = C^2 + D^2.$$

Les nombres A' , B' , C , D peuvent être considérés comme caractéristiques d'une vibration elliptique déterminée, et si l'on suppose que cette vibration alterne avec des vibrations constituant un faisceau partiellement polarisé suivant l'axe des x ou l'axe des y , dont les composantes parallèles à ces axes soient $A - A'$ et $B - B'$, on aura obtenu un des systèmes caractérisés par les valeurs données de A , B , C , D .

Parmi les systèmes en nombre infini qui jouissent tous des mêmes propriétés, il en est un qui par sa simplicité offre un intérêt particulier : c'est le système pour lequel $A - A' = B - B'$, et qui en conséquence peut être représenté par un faisceau de lumière naturelle et par un faisceau de lumière elliptique. Ces deux faisceaux sont l'un et l'autre entièrement déterminés. En appelant H la valeur commune de $A - A'$ et $B - B'$, on aura en effet

$$(A - H)(B - H) = C^2 + D^2,$$

d'où

$$H = \frac{A + B}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(A - B)^2 + 4(C^2 + D^2)}.$$

Ces deux valeurs sont réelles et positives, mais la plus grande étant supérieure à A et à B , la plus petite répond seule à la question, de sorte que

$$H = \frac{A + B}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(A - B)^2 + 4(C^2 + D^2)}.$$

Le double de cette expression est l'intensité du faisceau de lumière naturelle qui peut être censé entrer dans la constitution du faisceau que l'on considère. Les

éléments du faisceau elliptique qu'il y faut joindre sont d'ailleurs

$$a^2 = A - H = \frac{A - B}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(A - B)^2 + 4(C^2 + D^2)},$$

$$b^2 = B - H = -\frac{A - B}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(A - B)^2 + 4(C^2 + D^2)},$$

$$\cos \delta = \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}}, \quad \sin \delta = \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}}.$$

Ainsi tout faisceau lumineux homogène peut être constitué par des proportions déterminées de lumière naturelle et de lumière polarisée à vibrations rectilignes, circulaires ou elliptiques. On peut dire, en généralisant des expressions usitées, que tout faisceau lumineux est polarisé, naturel ou *partiellement polarisé*. Les caractères de la polarisation complète et de l'absence de toute polarisation sont connus; ceux des divers genres de polarisation partielle sont maintenant faciles à apercevoir.

1° Si un faisceau lumineux peut être censé formé d'un faisceau naturel et d'un faisceau polarisé rectilignement, les deux faisceaux en lesquels il se partage lorsqu'il rencontre sous l'incidence normale un cristal biréfringent ont des intensités variables avec l'orientation du cristal; l'intensité de chaque faisceau réfracté est maxima lorsque son plan de vibration est parallèle au plan de vibration de la lumière polarisée qui dans le faisceau incident se superpose à la lumière naturelle, et minima lorsqu'il lui est perpendiculaire. Le plan perpendiculaire à ce plan de vibration est, dans l'hypothèse de Fresnel, le plan de polarisation partielle. Une réflexion totale opérée dans le plan de polarisation partielle ou dans le plan perpendiculaire ne modifie pas les propriétés du faisceau; une réflexion totale opérée dans un autre plan transforme la lumière polarisée rectilignement en lumière elliptique, sans produire d'effet sur la lumière naturelle, et par conséquent modifie les propriétés du faisceau. C'est à un pareil faisceau qu'on applique ordinairement d'une manière exclusive l'expression de *faisceau partiellement polarisé*. On pourrait lui substituer celle de faisceau *en partie polarisé rectilignement*.

2° Si le faisceau lumineux peut être censé formé de lumière polarisée circulairement et de lumière naturelle, les intensités des deux faisceaux dans lesquels il est divisé par un analyseur biréfringent sont indépendantes de l'orientation, comme dans le cas de la lumière naturelle, mais ses propriétés sont modifiées par la réflexion totale qui transforme les vibrations circulaires en vibrations elliptiques ou rectilignes. La rotation uniforme d'une vibration elliptique de sens, de forme et de grandeur invariables est un moyen d'obtenir un pareil faisceau. On pourrait, pour le désigner, employer l'expression de faisceau *en partie polarisé circulairement*.

3° Si le faisceau peut être censé formé de lumière polarisée elliptiquement et de lumière naturelle, les intensités des faisceaux dans lesquels il est divisé par un

analyseur biréfringent dépendent de l'orientation, comme dans le cas de la polarisation rectiligne partielle, mais la réflexion totale modifie toujours les propriétés du faisceau, dans quelque plan qu'elle s'opère. On pourrait désigner un pareil faisceau en disant qu'il est *en partie polarisé elliptiquement*.

X.

Dans d'assez nombreuses recherches, particulièrement dans les expériences polarimétriques, on a considéré comme lumière partiellement polarisée la lumière qu'on obtenait en superposant deux faisceaux inégaux, polarisés à angle droit, issus d'un même faisceau primitivement polarisé et présentant l'un par rapport à l'autre une très-grande différence de marche. Si les deux faisceaux superposés étaient égaux, on considérerait la lumière comme naturelle. En réalité, dans ces expériences, chaque lumière homogène avait un état de polarisation déterminé, mais cet état variant très-rapidement avec la longueur d'onde, à cause de la grande différence de marche, les polarisations les plus diverses appartenaient à des rayons que l'œil est incapable de distinguer, et tant qu'on laissait le faisceau indécomposé, les propriétés de la lumière naturelle ou de la lumière partiellement polarisée étaient très-suffisamment imitées. Mais les expériences de MM. Fizeau et Foucault ont fait voir depuis longtemps quelle est la constitution réelle d'un pareil faisceau.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME DEUXIÈME.

	Pages.
Recherches sur les tuyaux d'orgue dits à cheminée, par M. <i>B. Gripon</i> , Professeur au Lycée et à l'École supérieure des Lettres et Sciences d'Angers.....	7
Sur deux intégrales doubles, par M. <i>Hermite</i> , Membre de l'Institut, Maître de Conférences à l'École Normale supérieure.....	49
Recherches sur les surfaces orthogonales, par M. <i>G. Darboux</i> , Agrégé préparateur à l'École Normale supérieure.....	55
Le thallium et ses principaux composés, par M. <i>A. Lamy</i> , Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de Lille.....	71
Sur la démonstration de la formule fondamentale de l'électrodynamique, par feu M. <i>P.-H. Blanchet</i> , ancien Maître de Conférences à l'École Normale supérieure, Inspecteur général de l'Instruction publique (Note publiée par M. <i>E. Verdet</i>).....	145
Essai sur la théorie analytique des satellites de Jupiter, par M. <i>Souillart</i> , ancien Élève de l'École Normale supérieure, Agrégé ès Sciences mathématiques, Professeur au Lycée de Caen.....	161
Études relatives à l'absorption de l'ammoniaque et à la production d'acides gras volatils pendant la fermentation alcoolique, par M. <i>E. Duclaux</i> , Agrégé préparateur à l'École Normale supérieure...	249
Étude sur la constitution de la lumière non polarisée et de la lumière partiellement polarisée, par M. <i>E. Verdet</i> , Maître de Conférences à l'École Normale supérieure.....	291
PLANCHES	319

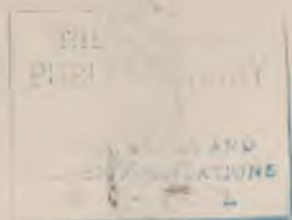
PLANCHES.

Pl. I. — Le thallium et ses principaux composés.

Pl. II. — Études relatives à l'absorption de l'ammoniaque et à la production d'acides gras volatils pendant la fermentation alcoolique.







*l'acides gras volatils
claux.*



0.^m008 à 0.^m004



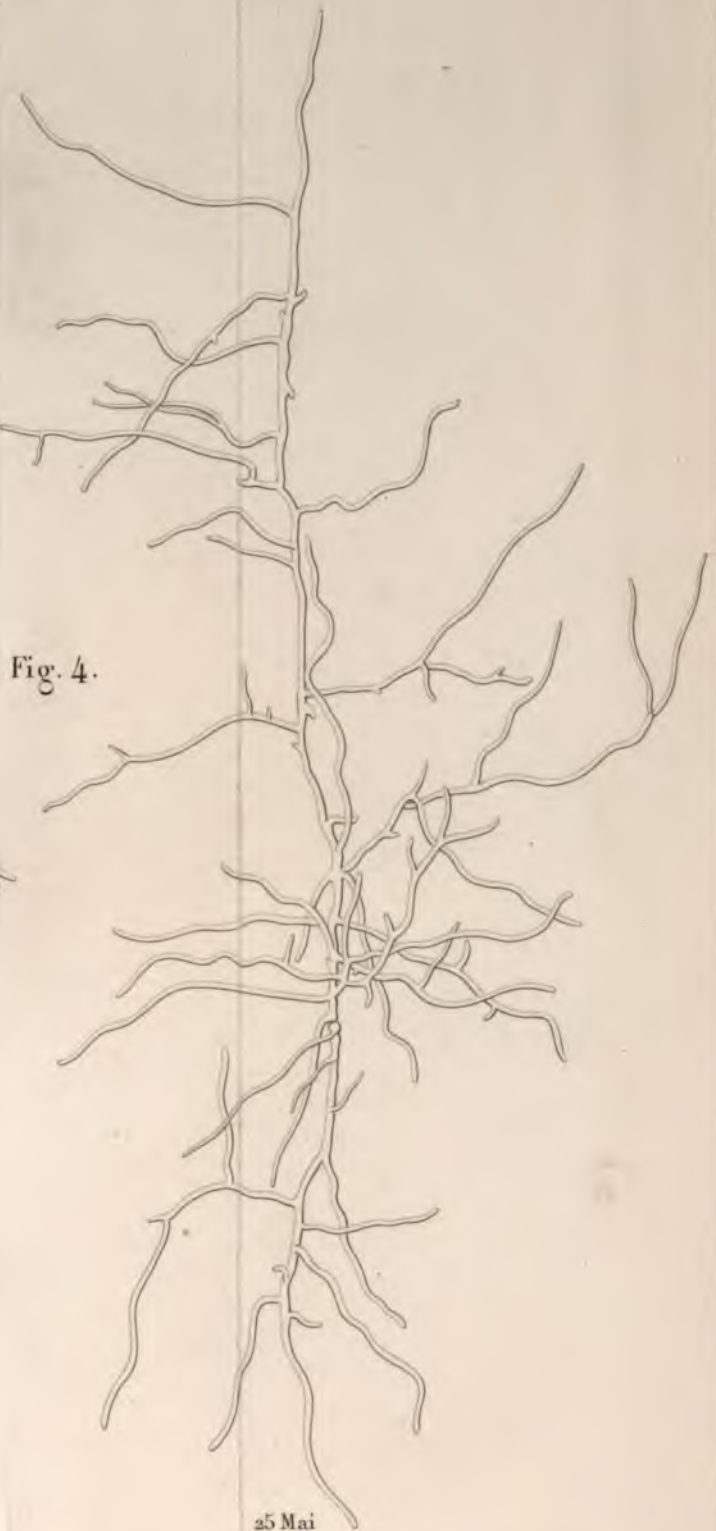
Fig. 9.

0.^m009 à 0.^m006

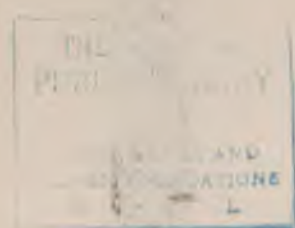


Fig. 12.

21 Mai
Spore
0.^m003a



25 Mai



*Acides gras volatils
laur.*



0^m.008 à 0^m.004



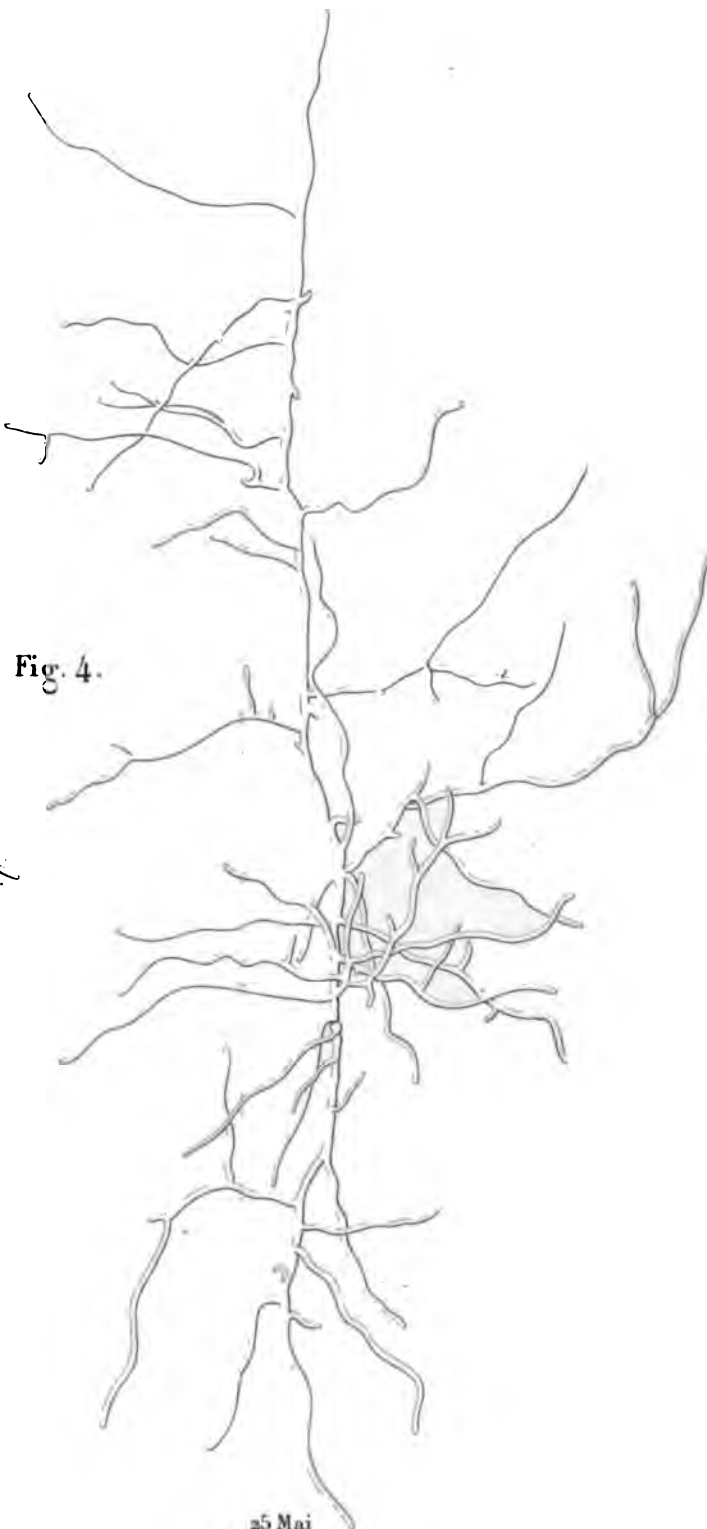
Fig. 9.

0^m.009 à 0^m.006



Fig. 12.

21 Mai
Spore
0^m.0030



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

H

L

Mr
CP

MAY 9 1938

